Квант

1974
5

Научно-популярный физико-математический журнал

250

АКАДЕМИИ НАУК СССР 250 ЛЕТ

ПИСЬМА

о разныхъ ФИЗИЧЕСКИХЪ и ФИЛОЗОФИЧЕСКИХЪ МАТЕРІЯХЪ,

писанныя

къ нѣкоторой нѣмецкой

ПРИНЦЕССѢ

съ Французскаго языка на Россійской

переведенныя

СТЕПАНОМЪ РУМОВСКИМЪ

Академіи Наукъ Членомъ, Астрономомъ
и Профессоромъ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ
при Императорской Академіи Наукъ
1768 года.

Титульный лист книги Леонарда Эйлера в переводе на русский язык. Эта книга — великолепная популярная и полная оригинальных идей энциклопедия физики XVIII века, по которой учились физике несколько поколений русских читателей (о работах Эйлера см. с. 27).

Основан в 1970 году.

Квант

1974
5

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ

2 250 лет Академии наук СССР

6 *В. А. Лешковцев.* Физика в Академии наук СССР (1917—1974 гг.)

18 *Б. В. Гнеденко.* Академия наук и прогресс математики

26 *Б. Н. Делоне.* Леонард Эйлер

36 *И. К. Кикоин.* Он прожил счастливую жизнь

43 *Д. С. Людмилов, С. Д. Людмилова.* Правдоподобные рассуждения и математика

Задачник «Кванта»

48 Задачи М261 — М265, Ф273 — Ф277

50 Решения задач М219 — М221; Ф228 — Ф232

Практикум абитуриента

58 *И. Ф. Шарыгин.* Задачи о пересечении тел

64 *И. А. Зайцев.* Электрические машины постоянного тока

70 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Рецензии, библиография

72 *В. П. Лишевский.* Новые книги

«Квант» для младших школьников

73 Задачи

74 *В. Н. Крупский, А. И. Орлов.* Коза на привязи

78 **Ответы, указания, решения**

Уголок коллекционера

А. В. Алтыкис, В. А. Лешковцев. На марках — Академия наук СССР (*3-я с. обложки*)

Смесь

(*с. 35, 42, 63*)

На первой странице обложки приведена фотография здания Президиума Академии наук СССР, находящегося в Москве.

250 ЛЕТ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Исполнилось 250 лет с момента образования высшего научного учреждения нашей страны — Академии наук СССР. Вся страна торжественно отмечает это выдающееся событие в истории отечественной науки. Отмечают его и во многих других государствах далеко за пределами нашей родины. Юбилей Академии наук — это смотр достижений отечественной науки.

Об истории Академии наук с момента ее возникновения и до Великой Октябрьской революции мы рассказали в предыдущем номере журнала в статьях академика С. И. Вавилова и академика АН УССР Б. В. Гнеденко. Теперь мы расскажем о судьбе Академии наук в последние 56 лет.

Великая Октябрьская революция вызвала огромные перемены в деятельности Академии наук. Советское правительство, возглавляемое В. И. Лениным, сразу раскрыло перед русскими учеными совершенно невиданные ранее возможности научной работы. Для победившей революции была ценна всякая научная инициатива, был дорог каждый ученый, старый и молодой, выдающийся и начинающий. С первых же месяцев существования советской власти, несмотря на крайне тяжелую обстановку в стране, правительство оказывало большую помощь научным учреждениям и отдельным ученым.

В. И. Ленин прекрасно понимал, что в строительстве социализма наука должна принимать активное участие. Поэтому он поставил такую задачу: «... все, что завоевала человеческая наука, человеческая техника, все усовершенствования, все знания специалистов,— все должно пойти на службу объединенному рабочему» *).

Октябрьская революция изменила место и роль науки в жизни общества. Теперь наука должна была служить интересам всего народа. Учитывая это, В. И. Ленин сказал в одном из выступлений в 1918 году: «Раньше весь человеческий ум, весь его гений творил только для того, чтобы дать одним все блага техники и культуры, а других лишить самого необходимого — просвещения и развития. Теперь же все чудеса техники, все завоевания культуры станут общенародным достоянием...» **).

Об этом же прекрасно сказал в своей речи на 200-летнем юбилее Академии наук Председатель ЦИК СССР М. И. Калинин: «... именно социалистическое общество больше, чем какой бы то ни было общественный строй, нуждается прежде всего в широком развитии как абстракт-

---

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч. Изд. 5, т. 38, с. 26.

**) Ленин В. И. Полн. собр. соч. Изд. 5, т. 35, с. 289.

ных, так и практических научных дисциплин, и оно же впервые дает научной мысли и работе условия подлинной свободы и плодотворного общения с самыми широкими массами».

Эти идеи настойчиво и последовательно проводились в жизнь. Советское правительство сразу же признало необходимость поддержки Академии наук. 9 апреля 1918 года секретарь Совета Народных Комиссаров Н. П. Горбунов по поручению В. И. Ленина сообщил руководству Академии, что «Совет Народных Комиссаров считает крайне желательным возможно широкое развитие научных предприятий Академии и приглашает Академию довести до сведения Совета об имеющихся предположениях экспедиций, предприятий и изданий Академии, с тем, чтобы им могло быть оказано скорейшее содействие». 11 апреля 1918 года Народный Комиссар просвещения А. В. Луначарский сообщил В. И. Ленину, что переговоры с руководством Академии, в которых участвовали Президент Академии наук академик А. П. Карпинский и вице-президент академик В. А. Стеклов, успешно завершены. На следующий день Совет Народных комиссаров принял решение о дополнительном финансировании работ Академии наук, которая получила возможность широкого развития экспериментальных исследований и экспедиционных работ. И все это было сделано в труднейшее для молодой советской республики время, в условиях гражданской войны, когда положение на фронтах было отчаянным, а разруха парализовала хозяйственную жизнь в стране.

В это же время В. И. Ленин составил «Набросок плана научно-технических работ» — первый шаг к перспективному планированию развития советской науки. В нем В.И.Ленин выдвинул идею грандиозного экономического подъема страны при непосредственном участии науки. Этот документ начинается словами: «Академии наук, начавшей систематическое изучение и обследование естественных производительных сил России, следует немедленно дать от Высшего совета народного хозяйства поручение...».

Новые задачи требовали новых форм организации науки, прежде всего создания большого числа научных институтов, объединяющих оставшихся в стране ученых и готовящих новые научные кадры из талантливой молодежи. Еще при жизни В. И. Ленина в Академии наук были организованы Физико-математический институт, Институт физико-химического анализа, Институт по изучению платины и других благородных металлов. Тогда же при других ведомствах были организованы Физико-технический институт, носящий теперь имя его основателя А. Ф. Иоффе, Государственный оптический институт имени Д. С. Рождественского, Радиевый институт имени В. Г. Хлопина, Центральный аэрогидродинамический институт имени Н. Е. Жуковского, Государственный институт прикладной химии, Институт по изучению Севера и ряд других крупных научных центров. Впоследствии деятельность этих институтов была тесно связана с Академией наук.

В. И. Ленин внимательно следил за работами Академии наук по изучению Курской магнитной аномалии, природных богатств Кольского полуострова. Большая помощь была оказана им великому русскому физиологу академику И. П. Павлову и выдающемуся механику члену-корреспонденту Академии наук Н. Е. Жуковскому. Он привлек к участию в разработке плана электрификации России (плана ГОЭЛРО) крупнейших ученых будущих академиков Г. М. Кржижановского, Г. О. Графтио, В. Ф. Миткевича, будущего члена-корреспондента Академии наук М. А. Шателена.

Вскоре после смерти В. И. Ленина, в июле 1925 года, было принято решение о преобразовании Российской Академии наук, сферой деятельности которой была в основном РСФСР, во Всесоюзную Академию наук. Академия получила ряд новых институтов. Ей было поручено руководство Всесоюзными конференциями и совещаниями по различным проблемам науки и техники.

В 1934 году Академия наук переехала из Ленинграда в Москву. Здесь она стала быстро превращаться в штаб советской науки, тесно связанный с другими государственными органами.

23 ноября 1935 года Совет Народных Комиссаров СССР утвердил новый устав Академии наук. В первом пункте этого устава сказано: «Академия наук Союза ССР является высшим научным учреждением СССР, объединяющим наиболее выдающихся ученых страны».

В трудные годы Великой Отечественной войны Академия внесла большой вклад в победу нашего народа над фашизмом. Героическую страницу в историю Академии вписали ее ленинградские учреждения во время блокады города-героя.

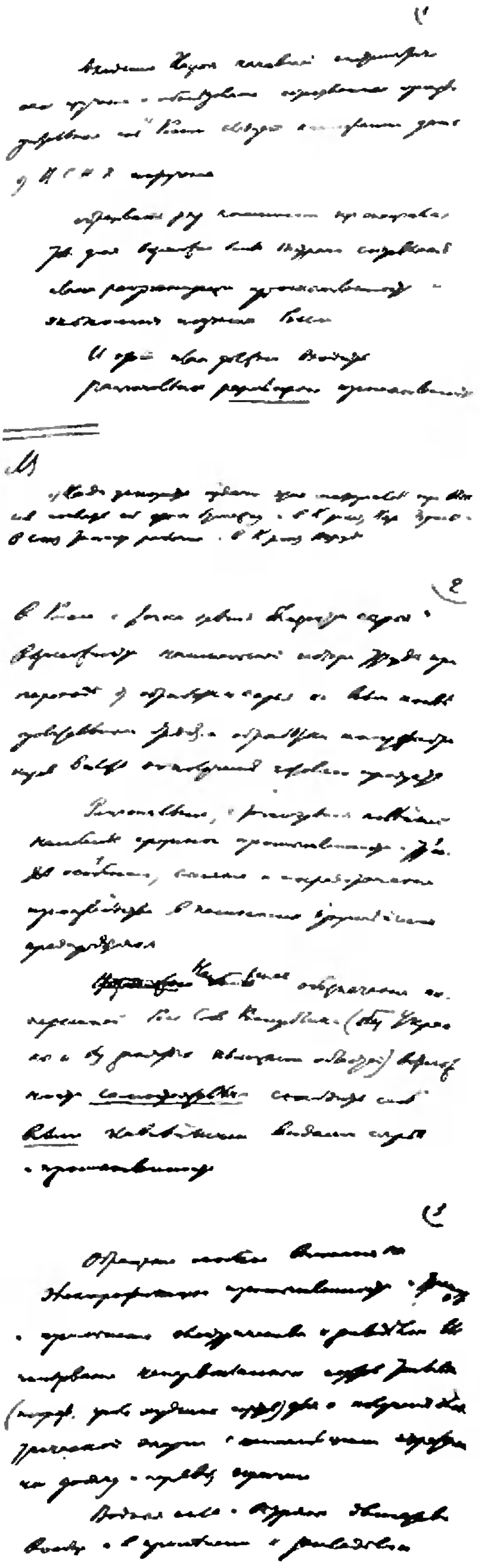
После окончания войны ученые Академии наук решили целый ряд важнейших проблем науки и техники. Под руководством академика И. В. Курчатова в необычайно короткие сроки было создано советское атомное и термоядерное оружие. Успешно были решены также проблемы мирного использования атомной энергии. Известно, что первая в мире атомная электростанция была построена в СССР. Академик С. П. Королев возглавил работы по созданию ракетно-космического комплекса для исследования и использования космического пространства. В нашей стране создана сложнейшая вычислительная техника. Особенно важное значение работа Академии приобрела в связи с происходящей в настоящее время научно-технической революцией, в которой науке принадлежит решающая роль.

Академия наук сегодня — это сотни научно-исследовательских институтов и учреждений и десятки тысяч научных работников. В 1928 году весь штат Физико-математического института Академии наук состоял из семи человек: директора, двух заведующих отделами и четырех научных сотрудников. Сегодня в одном лишь Физическом институте Академии наук имени П. Н. Лебедева работает несколько тысяч сотрудников. По данным на начало 1973 года в Академии состояли 244 академика, 449 членов-корреспондентов и 69 иностранных членов. Вся деятельность Академии направляется Президиумом, возглавляемым президентом академиком М. В. Келдышем.

Многочисленные академические институты и учреждения объединены в отделения по различным разделам науки: математики — в отделение математики, физики — в отделение общей физики и астрономии и отделение ядерной физики, механики — в отделение механики и процессов управления. Всего в составе Академии находится 16 отделений. Помимо этого, Академия наук СССР имеет очень крупное Сибирское отделение, в состав которого входит более 30 институтов, а также Уральский и Дальневосточный научные центры. В состав Академии входят также 6 филиалов: Казанский, Башкирский, Дагестанский, Карельский, Кольский и Коми-филиал.

Каждая союзная республика имеет свою Академию наук, тесно связанную с Академией наук СССР.

Академия наук внесла огромный вклад в развитие советской физики и математики. Мы рассказываем о нем в статьях, помещенных в этом номере.



В. И. ЛЕНИН. НАБРОСОК ПЛАНА НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ РАБОТ

Написан в апреле 1918 г.

«Академии наук, начавшей систематическое изучение и обследование естественных производительных сил *) России, следует немедленно дать от Высшего совета народного хозяйства поручение образовать ряд комиссий из специалистов для возможно более быстрого составления плана реорганизации промышленности и экономического подъема России.

В этот план должно входить:

рациональное *размещение* промышленности в России с точки зрения близости сырья и возможности наименьшей потери труда при переходе от обработки сырья ко всем последовательным стадиям обработки полуфабрикатов вплоть до получения готового продукта.

Рациональное, с точки зрения новейшей наиболее крупной промышленности и особенно трестов, слияние и сосредоточение производства в немногих крупнейших предприятиях.

Наибольшее обеспечение теперешней Российской Советской республике (без Украины и без занятых немцами областей) возможности *самостоятельно* снабдить себя *всеми* главнейшими видами сырья и промышленности.

Обращение особого внимания на электрификацию промышленности и транспорта и применение электричества к земледелию. Использование непервоклассных сортов топлива (торф, уголь худших сортов) для получения электрической энергии с наименьшими затратами на добычу и перевоз горючего.

Водные силы и ветряные двигатели вообще и в применении к земледелию.»**

---

*) NB: Надо ускорить *издание* этих материалов изо всех сил, послать об этом бумажку и в Комиссариат народного просвещения, и в союз типографских рабочих, и в Комиссариат труда.

**) Ленин В. И. Полн. собр. соч. Изд. 5, т. 36, с. 228—231.

ФИЗИКА В АКАДЕМИИ НАУК СССР (1917–1974 гг.)

В. А. Лешковцев

Созданная Петром I Академия наук на протяжении XVIII века была почти единственным центром физической науки в России. Но уже в самом начале XIX века в стране начали возникать и успешно развиваться новые научные центры, где проводились физические исследования. Это были университеты, Медико-хирургическая Академия, Московское общество испытателей природы. Со временем внеакадемическая физика стала играть очень важную роль в развитии физики в России. Александр Григорьевич Столетов, Николай Алексеевич Умов, Петр Николаевич Лебедев, Александр Степанович Попов и ряд других известных русских физиков не были членами Академии наук. Можно прямо сказать, что роль Академии в развитии отечественной физики в конце XIX и начале XX века была весьма скромной.

Это положение коренным образом изменилось вскоре после Великой Октябрьской революции. В начале тридцатых годов Академия наук становится высшим научным учреждением Советского Союза, объединяющим крупнейших ученых различных отраслей знания, в том числе и физиков. Уже в эти годы в ее составе мы видим выдающихся советских физиков Абрама Федоровича Иоффе, Дмитрия Сергеевича Рождественского, Леонида Исааковича Мандельштама, Сергея Ивановича Вавилова, Дмитрия Владимировича Скобельцына, Николая Дмитриевича Папалекси, Владимира Александровича Фока, Игоря Евгеньевича Тамма, Петра Леонидовича Капицу, Льва Давидовича Ландау и других. Быстро расширяется сеть научных институтов, занимающихся разработкой физических проблем.

Физика оказывает решающее влияние на различные отрасли техники — энергетику, связь, промышленное производство. В наши дни она является одной из главных движущих сил научно-технической революции, преобразующей современную промышленность. В связи с этим возникает необходимость усиленного развития физических исследований.

В настоящее время в состав Академии наук СССР входит более двадцати крупных научных физических институтов. Среди них Физический институт имени П. Н. Лебедева, Физико-технический институт имени А. Ф. Иоффе, Институт физических проблем имени С. И. Вавилова, Институт кристаллографии имени А. В. Шубникова, Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау, Институт радиотехники и электроники, Институт физики твердого тела, Институт физики высоких давлений и другие. Многочисленные научные физические институты созданы в республиканских Академиях. Кроме того, члены Академии руководят работой во многих физических институтах, не принадлежащих Академии наук (Институт атомной энергии имени И. В. Курчатова, Объединенный институт ядерных исследований, Институт физики высоких энергий, Институт точной механики и вычислительной техники и т. д.).

Академия наук СССР определяет развитие советской физики и обеспечивает подготовку научных работников наиболее высокой квалификации.

В небольшой статье совершенно невозможно рассказать о достижениях Академии наук в области физики за годы советской власти. Об этом уже написаны обстоятельные научные труды. К тому же большинство работ по своему научному содержанию необычайно сложно и далеко выходит за рамки школьных представлений. Мы расскажем здесь лишь о некоторых фундаментальных исследованиях выдающихся советских физиков — членов Академии наук СССР. При этом речь пойдет о работах, авторов которых уже нет среди нас. Что же касается ныне здравствующих авторов фундаментальных физических исследований, то мы надеемся, что они сами расскажут о своих достижениях на страницах нашего журнала.

Несмотря на большое количество направлений, на которые разделилась современная физика, основными ее разделами остаются физика твердого тела, оптика и радиоэлектроника, физика атомного ядра и элементарных частиц. В каждом из этих направлений советские физики выполнили исследования, ставшие теперь классическими.

Наш рассказ мы начнем с физики твердого тела.

Огромный вклад в эту чрезвычайно важную область физики внесли работы академика Абрама Федоровича Иоффе и его учеников.

Большинство твердых тел имеет кристаллическую структуру. При исследовании их свойств физики всегда

Академик А. Ф. Иоффе (1880—1960).

стремятся пользоваться образцами, максимально приближающимися к идеальным кристаллам как по совершенству кристаллической структуры, так и по степени химической чистоты. Это вполне оправдано, потому что только на совершенных образцах можно получить однозначные результаты исследования.

Долгое время в физике господствовали представления о том, что реальные кристаллические тела мало чем отличаются от идеальных. Общепризнанная теория кристаллической решетки, разработанная Максом Борном, исходила из представлений об идеальном кристалле, где каждый атом находится на своем месте, а какие-либо нарушения структуры (примеси, внутренние дефекты) полностью отсутствуют. Эта теория описывала многие свойства кристаллических тел (электропроводность, теплопроводность и т. д.). Но как только дело доходило до определения прочности на разрыв, наблюдалось громадное расхождение между теоретическими предсказаниями и экспериментальными результатами. Прочность реальных кристаллов оказалась в сотни раз ниже теоретической. Например, теория указывает, что каменная соль должна выдерживать напряжения до $2 \cdot 10^9$ $н/м^2$, а в действительности кристаллы каменной соли разрываются уже при нагрузке $4 \cdot 10^6$ $н/м^2$. Теоретическая прочность железа должна быть порядка 10^{10} $н/м^2$, а в действительности она на два порядка меньше.

Если бы мы научились получать материалы с прочностью, близкой к теоретической, это произвело бы настоящую революцию во многих отраслях техники, в том числе и в новейшей из них — ядерной.

Академик А. Ф. Иоффе первый понял причину этого громадного расхождения. Дело в том, что реальный кристалл существенно отличается от идеального. Как внутри, так и на поверхности его имеется много различных дефектов. Например, в каком-нибудь узле кристаллической решетки поваренной соли вместо атома натрия оказался атом хлора или серы, а иногда вообще никакого атома нет. На поверхности кристалла при сильном увеличении можно увидеть разветвленную сеть микроскопических трещин. Такие дефекты резко понижают прочность кристаллов.

Чтобы убедиться в этом, А. Ф. Иоффе произвел в 1924 году поразительно простые опыты, которые с тех пор вошли во все курсы общей физики под названием «эффекта Иоффе». Погружая кристаллы каменной соли в теплую воду, он растворял тонкий поверхностный слой вместе с присущими ему дефектами. При этом прочность кристаллов возрастала более чем в 10 раз.

В другой серии опытов выточенные из кристаллов каменной соли шары медленно охлаждались до температуры жидкого воздуха, а затем быстро погружались в расплавленный свинец. При этом, согласно теории, внутри шаров должно было возникать внутреннее напряжение (за счет быстрой смены сжатия на расширение) порядка $7 \cdot 10^8$ $н/м^2$. Но шары не разрывались, свидетельствуя о том, что подлинная внутренняя прочность каменной соли близка к теоретическому пределу.

Идеально упругое кристаллическое тело после прекращения воздействия деформирующей силы должно возвратиться в исходное недеформированное состояние. В действительности же всякая деформация оставляет за собой медленно исчезающий след — так называемое упругое последствие. Кроме того, предсказываемый теорией предел упругости, за которым твердое тело начинает течь подобно вязкой жидкости, также значительно выше реально наблюдаемой величины.

А. Ф. Иоффе первым создал метод экспериментального исследования механизма пластической деформации кристаллических тел. Суть этого метода состоит в последовательном наблюдении дифракции рентгеновских лучей, проходящих через кристалл, медленно деформируемый под влиянием внешних сил. Проходя через кристалл, рентгеновские лучи дают на помещенной за ним фотопленке систему закономерно расположенных пятен. Опыты, проделанные с кристаллами каменной соли, показали, что до определенного предела нагрузки никаких изменений на полученных рентгенограммах не наблюдается. При достижении предела упругости пятна на рентгенограмме внезапно раздваиваются, затем умножаются и, наконец, вытягиваются в длинные «хвосты». Это свидетельствует о том, что за пределом упругости образцы перестают быть правильными монокристаллами; они распадаются на отдельные монокристаллики, которые смещаются и поворачиваются относительно своих соседей. Каждый из них дает свою систему пятен, суммирующуюся с пятнами от других монокристалликов. Такое явление было названо астеризмом, а предложенный

А. Ф. Иоффе метод стал одним из основных методов исследования механизма деформаций кристаллических тел.

Продолжая эти исследования, А. Ф. Иоффе установил, что пластическая деформация происходит в кристалле не непрерывно, как думали до той поры все физики, а скачкообразно. При непрерывно действующей нагрузке деформация идет скачками, повторяющимися через одинаковые промежутки времени и даже сопровождающимися слабыми щелчками, напоминающими тиканье часов.

Этими, а также и некоторыми другими работами А. Ф. Иоффе заложил фундамент современных представлений о механизме прочности и пластичности реальных твердых тел. Он подал физикам глубокую идею о необходимости изучения различных дефектов кристаллической решетки, чрезвычайно сильно влияющих на многие свойства твердых тел.

Другой областью физики твердого тела, в которую академик А. Ф. Иоффе также внес вместе со своими учениками огромный вклад, является физика полупроводников. Сегодня трудно себе представить развитие техники без полупроводников. Но сорок с лишним лет назад, когда А. Ф. Иоффе занялся систематическим исследованием свойств полупроводников, многие физики весьма критически отнеслись к этому начинанию. В то время казалось, что только металлы и диэлектрики являются материалами, достойными серьезных физических исследований. Проводники и изоляторы — это важно и нужно технике, а полупроводники, хотя к ним относится большинство природных соединений, — бесполезный и бесперспективный материал. Но А. Ф. Иоффе гениально предвидел ту огромную революционизирующую роль, которую уже сегодня полупроводники играют в технике. «Можно предполагать,— говорил он немного позднее,— что прогресс техники второй половины XX столетия определится в первую очередь атомным ядром и полупроводниками».

На первых порах нужно было разработать методы получения достаточно чистых полупроводников и способы определения их основных физических характеристик: концентрации носителей тока, типа проводимости (электронный или дырочный), подвижности электронов и дырок и т. д. Многие из этих методов, впервые созданные А. Ф. Иоффе и его учениками, стали впоследствии классическими.

Школа Иоффе выполнила целую серию пионерских исследований электрических, гальваномагнитных, термоэлектрических и фотоэлектрических свойств полупроводников различных типов.

Одним из важнейших результатов, полученных А. Ф. Иоффе и его сотрудниками, было обнаружение огромного влияния примесей на электрические свойства полупроводников. А. Ф. Иоффе показал, что примеси не только меняют в широких пределах проводимость полупроводников, но могут изменять даже знак носителей тока, превращать электронный полупроводник в дырочный и наоборот. Причем, роль примеси могут играть не только чужеродные атомы, но и собственные атомы полупроводника при их избытке или недостатке. Например, избыток атомов свинца в полупроводнике PbS делает этот полупроводник электронным, а избыток атомов серы — дырочным полупроводником.

А. Ф. Иоффе первым сформулировал и экспериментально обосновал современные представления о механизме выпрямляющего действия полупроводников. Он показал, что в результате контакта двух полупроводников с различными носителями тока — электронного и дырочного — образуется запирающий слой (по современной терминологии «*p* — *n*-переход»). При этом ток может свободно проходить через соприкасающиеся участки только в том направлении, при котором электроны и дырки движутся навстречу друг другу по направлению к контакту, где они встречаются и рекомбинируют. В противоположном случае электроны и дырки расходятся друг от друга и проводимость контактного слоя резко падает, так как в нем остается крайне мало носителей тока. Эти работы открыли путь к созданию полупроводниковых выпрямителей (диодов).

Особенно большое внимание А. Ф. Иоффе уделял исследованиям термоэлектрических и фотоэлектрических свойств полупроводников. Используя эти свойства, можно создать новые методы прямого преобразования энергии тепла и света в электрическую энергию. Работами А. Ф. Иоффе были заложены основы современных солнечных батарей, успешно используемых на космических аппаратах.

А. Ф. Иоффе создал теорию термоэлектрогенераторов и термоэлектрических холодильников, открыв для современной техники новую обширную область — полупроводниковую энергетику. Под его руководством были сконструированы десятки новых типов полупроводниковых приборов и энергетических устройств, получивших разнообразные практические применения.

●

С давних пор была известна аналогия между электрическими и магнитными полями. Известна и формальная аналогия между магнитной и диэлектрической проницаемостями. Но долгое время среди диэлектриков не было обнаружено вещество с аномально большой диэлектрической проницаемостью, подобной аномальной магнитной проницаемости ферромагнетиков. Только в двадцатые годы было найдено несколько таких веществ, в том числе сегнетова соль. Их исследованием занялся академик Игорь Васильевич Курчатов со своими сотрудниками. В течение короткого времени их работы положили начало новой области физики диэлектриков, которая называется сегнетоэлектричеством. Оказалось, что зависимость электрического момента сегнетовой соли от внешнего электрического поля такая же, как и намагничивания ферромагнетиков от магнитного поля: наблюдается такая же гистерезисная петля. Исследовались точка Кюри (их оказалось две) и явления, сопровождающие переход через эту точку. Словом, был воспроизведен электрический вариант длинной истории изучения ферромагнетиков.

В истории советской физики имя академика И. В. Курчатова неразрывно связано с решением грандиозной проблемы создания отечественного атомного и термоядерного оружия и развития атомной энергетики.

Рассказ об этих исследованиях вы найдете в статье академика И. К. Кикоина «Он прожил счастливую жизнь», помещенной в этом же номере нашего журнала.

●

В современной физике твердого тела важную роль играет теоретическая физика с ее весьма сложным математическим аппаратом. Кристаллическое тело, которое прежде рассматривалось как система, состоящая из колеблющихся атомов и молекул, теперь рассматривается как объем, заполненный фононным газом. Фононами называют кванты поля колебаний решетки — по аналогии с фотонами, квантами электромагнитного поля. Фонон, как и фотон, во многих отношениях ведет себя так, как если бы он был частицей; поэтому их часто называют квазичастицами. Честь введения в науку понятия «фонон» принадлежит академику Игорю Евгеньевичу Тамму, который в 1930 году использовал понятие «квант упругости» при рассмотрении вопроса о рассеянии света в кристаллах. Термин «фонон» в том же году ввел в физическую литературу член-корреспондент АН СССР Яков Ильич Френкель. Поведение фононного газа описывается тем же математическим аппаратом, что и излучение абсолютно черного тела. Без понятия фонона трудно было бы представить себе, как любое возбуждение, например колебание отдельного атома, перемещается в твердом теле.

В 1931 году Я. И. Френкель теоретически предсказал весьма интересное физическое явление. Решая задачу о возбуждении атомов светом в идеальном кристалле, он показал, что возбужденное состояние, которое возникает у какого-либо атома такого кристалла после поглощения кванта света, не может быть локализовано там, где находится этот атом, а непременно должно перемещаться по кристаллу в виде своеобразной квазичастицы, которую Френкель назвал «экситоном».

Дело в том, что, как показывают расчеты, энергия кристалла не изменится, если в таком же возбужденном состоянии окажется не первоначальный возбужденный атом, а любой другой атом кристалла. Состояния, в которых любой из атомов кристалла оказывается возбужденным, физически неразличимы. Поэтому энергия возбуждения будет переходить от атома к атому до тех пор, пока один из получивших ее атомов не перейдет в нормальное невозбужденное состояние, испустив полученный им квант. Существование экситонов было в дальнейшем подтверждено в экспериментах члена-корреспондента АН СССР Евгения Федоровича Гросса. Теперь существует широкая научная область, которую можно назвать «экситонной физикой».

Для описания электрических и оптических свойств ряда полупроводников и диэлектриков оказалось необходимым ввести еще одну квазичастицу — «полярон». Она возникает вследствие поляризации электроном окружающей среды. В результате электрон становится как бы тяжелее и характер его движения в кристалле меняется. Полярон ввел в физику твердого тела академик Лев Давидович Ландау (совместно с академиком АН УССР С. И. Пекаром).

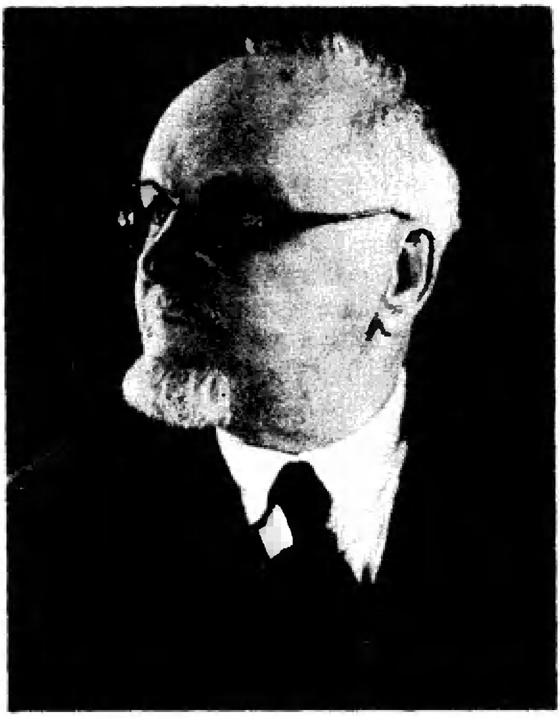
Академик Л. Д. Ландау (1908—1968).

Квазичастицы имеют весьма важное значение для развития наших представлений о природе кристаллов и разыгрывающихся в них процессах поглощения, передачи и излучения энергии.

В учебном пособии по физике для 9 класса последние параграфы посвящены описанию ферромагнетизма. Основы теории этого явления заложены советскими физиками-теоретиками. Член-корреспондент АН СССР Я. И. Френкель первый показал, что природа ферромагнетизма связана с взаимодействием собственных магнитных моментов электронов. Академик Л. Д. Ландау (совместно с членом-корреспондентом АН СССР Е. М. Лифшицем) создал теорию доменной структуры ферромагнетиков. Оказалось, что возникновение доменов является следствием стремления кристаллической структуры прийти в состояние с минимальной энергией.

Л. Д. Ландау предсказал теоретически, что свободные электроны (электроны проводимости) в металле должны создавать во внешнем магнитном поле дополнительный магнитный момент, направленный в сторону, противоположную направлению внешнего магнитного поля, то есть диамагнитный момент. Это — так называемый диамагнетизм Ландау.

Мы не останавливаемся здесь на классической работе Л. Д. Ландау по теории сверхтекучести жидкого гелия. О ней подробно рассказано в статье А. Ф. Андреева («Квант», 1973, № 10).



Академик Д. С. Рождественский (1876—1940).

ереходя к работам по оптике, остановимся лишь на замечательных исследованиях академиков Дмитрия Сергеевича Рождественского, Леонида Исааковича Мандельштама и Сергея Ивановича Вавилова.

Академик Д. С. Рождественский разработал отечественную технологию приготовления оптического стекла, благодаря чему уже в 1925 году Советский Союз полностью отказался от покупки такого стекла в других странах. Он внес очень важный вклад в изучение резонансного поглощения света парáми щелочных металлов и развитие спектрального анализа. Им была существенно усовершенствована теория микроскопа.

Физика долго не могла дать правильного ответа на такой, казалось бы, простой вопрос: «А почему небо голубое?» Даже Ньютон, посвятивший этой проблеме много лет упорного труда, так и не сумел ее решить. Первым удовлетворительную теорию рассеяния света в атмосфере создал другой английский физик — Рэлей. Предположив, что свет рассеивают молекулы воздуха, он получил хорошее совпадение с результатами наблюдений.

Казалось бы, все ясно, проблема полностью решена. И только один физик, академик Л. И. Мандельштам, не согласился с этой интерпретацией. Он доказал, что истинной причиной, порождающей голубой цвет неба, являются флуктуации плотности (случайные изменения плотности воздуха по отношению к средней плотности), происходящие под влиянием теплового движения. Л. И. Мандельштам показал, что формула Рэлея верна, а физическая сущность картины рассеяния света совершенно иная. Эта работа была опубликована еще в 1907 году. Она явилась одной из первых работ по теории флуктуаций, то есть микроскопических отклонений той или иной физической величины от среднего значения.

Л. И. Мандельштам был первым физиком, обратившим внимание на то, что флуктуации давления, температуры, концентрации или ориентации молекул (если молекулы неизотропны) должны накладывать свой отпечаток на рассеяние падающего на них света, как говорят, модулировать его. В работах, начатых еще в 1908 году, он обосновал неизбежность рассеяния света на флуктуациях плотности, приводящего к появлению в рассеянном свете, помимо падающей волны длины λ_0, еще двух соседних волн λ_1 и λ_2, смещенных в оба конца спектра на одинаковую величину $\Delta\lambda$. Этот дублет Мандельштама — Бриллюэна *), близко примыкающий к основной линии λ_0, был впервые обнаружен членом-корреспондентом АН СССР Е. Ф. Гроссом.

Триумфом оптических исследований академика Л. И. Мандельштама было открытие совместно с академиком Григорием Самуиловичем Ландсбергом комбинационного рассеяния света.

В 1927 году ими был поставлен следующий эксперимент. Монохроматический свет, полученный от ртутной лампы с помощью фильтра, падал на кристалл максимально чистого и однородного кварца. Свет, рассеянный этим кристаллом, анализировался спектрографом. После чрезвычайно долгой экспозиции им удалось заметить слабые спектральные линии на равных расстояниях от первичной. Это значит, что свет при рассеянии в кристалле изменяет свой цвет! Тщательное исследование этих линий показало, что они сопровождают каждую спектральную линию первичного света. Разность между частотами этих линий и частотой падающего света совпадает с частотами внутренних колебаний молекул рассеивающего вещества. Кроме того, интенсивность линий, смещенных в красную сторону спектра, значительно выше интенсивности линий, смещенных в синюю сторону.

*) Л. Бриллюэн — французский физик, одновременно пришедший к тем же выводам.

Академик Л. И. Мандельштам (1879—1944).

Грубую картину механизма этого взаимодействия можно получить следующим образом. Каждая молекула данного вещества может совершать различные внутренние колебания. Им соответствует определенный набор квантов электромагнитной энергии, $h\nu_i$, которые молекула способна принимать от окружающей среды и возвращать обратно. Если квант падающего света с энергией $h\nu_0$ взаимодействует с невозбужденной молекулой, он отдает ей часть своей энергии, равную $h\nu_i$. При этом в рассеянном свете появляется смещенная в «красную» сторону линия с частотой $\nu_к = \nu_0 - \nu_i$, то есть свет с большей длиной волны. Если же квант встречается с возбужденной молекулой, обладающей энергией возбуждения $h\nu_i$, он сам может получить эту энергию от молекулы, и тогда родится смещенная в «синюю» сторону линия с частотой $\nu_с = \nu_0 + \nu_i$. Нетрудно видеть, что смещенные линии должны располагаться симметрично по обе стороны от основной линии падающего света.

Так как в обычных условиях число невозбужденных молекул значительно больше, чем возбужденных, интенсивность линий, смещенных в «красную» сторону спектра, должна быть значительно выше, что соответствует действительности.

Продолжая свои исследования, Л. И. Мандельштам и Г. С. Ландсберг создали новый метод спектрального анализа молекул, основанный на изучении спектров комбинационного рассеяния. Этот метод получил широкое распространение и применяется теперь во всех странах *).

Мы не можем здесь, ввиду их сложности, рассказать о фундаментальных работах академиков Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси по теории и технике колебаний, послуживших основой развития радиофизики и радиотехники.

Академик С. И. Вавилов (1891—1951).

Академик С. И. Вавилов с первых лет научной деятельности заинтересовался явлением фотолюминесценции, изучение которого он не прекращал до конца своей жизни. Под действием света некоторые вещества сами испускают характерное для них свечение, которое получило название люминесценции. Это свечение продолжается и после прекращения облучения. При люминесценции происходит поглощение возбуждающего света и испускание (с некоторой задержкой по времени) света люминесценции, длина волны которого отлична от длины волны поглощенного света.

Люминесценция различных веществ чрезвычайно разнообразна по спектральному составу испускаемого излучения. Длительные поиски законов, управляющих люминесценцией, привели лишь к установлению некоторых эмпирических правил, которые не охватывали всех основных опытных фактов и допускали значительные исключения. Примером является так называемое правило Стокса, согласно которому длина волны излучения люминесценции должна быть больше длины волны возбуждающего света. Так как энергия излученных квантов прямо пропорциональна частоте ν (и обратно пропорциональна длине волны λ), то увеличение длины волны при люминесценции свидетельствует о том, что некоторая доля энергии, поглощенной люминесцентным веществом, остается в нем, переходя в тепло. Однако это правило нередко нарушается на опыте. Подлинные законы спектрального преобразования света были открыты С. И. Вавиловым в результате длительного экспериментального и теоретического исследования энергетики люминесцентных процессов. Они являются теоретической основой не только для науки о люминесценции, но и для ее технических приложений.

*) Только случайная задержка с пересылкой в редакцию журнала уже готовой научной статьи лишила авторов этого крупнейшего открытия Нобелевской премии.

За последние десятилетия люминесценция широко используется в различных областях науки и техники. На ее основе разработаны новые методы химического и сортового анализа различных веществ — так называемый люминесцентный анализ. В развитии этих практических применений люминесценции большая заслуга принадлежит С. И. Вавилову. Но особенно большое значение имеют его работы по созданию люминесцентных источников света, открывшие новый этап в истории светотехники.

Основной источник света в наши дни — электрические лампочки накаливания — имеют очень крупные недостатки. Коэффициент полезного действия этих ламп не превышает 8%. Более 90% энергии теряется ими на создание невидимого инфракрасного излучения. Спектральный состав видимого света у этих ламп значительно отличается от состава солнечного света, к которому наиболее приспособлен человеческий глаз. Температура накала вольфрамовой нити в лампе 2200—2300° С. Для получения света, близкого к солнечному, и увеличения светоотдачи пришлось бы поднять ее до 6000° С. Однако еще задолго до этого нить лампочки распылится.

Недостатки электрических ламп накаливания побуждают ученых искать новые, более экономичные и удобные источники света. Такими источниками и оказались люминесцентные лампы. Люминесцентные вещества являются световыми трансформаторами. Они могут превращать один вид света в другой, например, невидимые ультрафиолетовые, то есть бесполезные в светотехническом отношении, лучи в видимые, или однородный свет — в широкие спектральные полосы самого различного состава.

С. И. Вавилов первым предложил использовать мощное ультрафиолетовое излучение ртутных ламп для получения видимого света с помощью люминесцентных веществ. Идя по этому пути, он создал люминесцентные лампы дневного света.

Основной частью люминесцентных ламп Вавилова является газоразрядная трубка, заполненная пара́ми ртути при низком давлении. Электроны, проходя через трубку при разряде, возбуждают ультрафиолетовое излучение ртути. Если наблюдать разряд через прозрачные стенки трубки, то можно заметить, что внутренность ее светится слабым голубым светом. Основная доля излучения ртути сосредоточена в ультрафиолетовой области. Для преобразования ее в видимый свет на внутреннюю стенку трубки наносят слой «светового трансформатора» — кристаллического люминесцентного порошка. Применяя различные порошки, можно получить свет любого цвета. Наибольший практический интерес представляют порошки, свечение которых близко к дневному рассеянному солнечному свету (например, дневному свету при облачном небе). Коэффициент полезного действия и средний срок службы таких ламп значительно больше обычных.

Перейдем теперь к работам в области физики атомного ядра.

Атомные ядра включают в себя заряженные частицы — протоны, сближенные до расстояния порядка 10^{-13} *см*. Казалось бы, они должны немедленно разрушаться под влиянием громадного электростатического отталкивания протонов друг от друга. Но мы знаем, что этого не происходит. Только очень тяжелые ядра элементов, стоящих в конце периодической системы Менделеева, оказываются неустойчивыми, и это приводит к радиоактивному распаду. Что же придает такую необычайную прочность атомным ядрам? Атомные ядра существуют только потому, что между всеми входящими в них частицами действуют могучие ядерные силы.

Основная идея, на которую опираются современные представления о природе ядерных сил, была выдвинута в 1934 году академиком И. Е. Таммом. Он первым понял, что эти силы могут быть только обменными. К этому времени уже были разработаны основные представления о квантовой природе электромагнитного поля, согласно которым взаимодействие двух заряженных частиц осуществляется посредством квантов, испускаемых и поглощаемых этими частицами. Таким образом, взаимодействие есть результат обмена промежуточными частицами, создающими электромагнитное поле.

И. Е. Тамм предположил, что не только электромагнитное, но и ядерное взаимодействие носит квантовый характер и осуществляется путем обмена какими-то промежуточными частицами. Предположив, что ядерные частицы обмениваются электронами, И. Е. Тамм построил первую математическую теорию ядерных сил. Однако величина этих сил оказалась на несколько порядков меньше их действительного значения.

Вскоре после этого японский физик Юкава показал, что если масса обменной частицы будет примерно в 300 раз больше массы электрона, то теория И. Е. Тамма хорошо описывает основные особенности ядерных сил. Впоследствии физики обнаружили частицы, отвечающие за перенос ядерных сил. Ими оказались так называемые пи-мезоны. Масса пи-мезонов и их свойства соответствуют теории Тамма—Юкавы.

И. Е. Тамм первый пришел к казалось бы парадоксальному выводу о том, что у нейтрона должен быть собственный магнитный момент, хотя эта частица не имеет электрического заряда. В 1934 году он не только теоретически предсказал существование магнитного момента у нейтрона, но и правильно определил знак этого момента.

Успехи ядерной физики второй половины двадцатого века неразрывно связаны с ускорителями заряженных частиц. Ускорители позволяют создавать новые элементарные частицы, которые рождаются в момент взаимодействия ускоренных частиц-снарядиков с частицами, входящими в состав мишеней. При этом чем выше энергия ускоренных частиц, тем более разнообразные новые элементарные частицы и античастицы (мезоны, гипероны, резонансы) могут быть получены с их помощью. Ускорители используются также для изучения строения элементарных частиц (протонов и нейтронов). На них же создаются сверхтяжелые химические элементы, стоящие после урана в периодической системе Менделеева (их называют трансурановыми) и атомные ядра с необычным отношением числа протонов и нейтронов.

В настоящее время наиболее распространены циклические ускорители, в которых заряженные частицы движутся по путям, близким к окружностям, многократно ускоряясь в специальных ускорительных устройствах. Первым таким ускорителем был циклотрон. Однако предел энергии, которую можно сообщать протонам в циклотроне, сравнительно невелик и составляет несколько десятков миллионов электрон-вольт.

Создание современных ускорителей на десятки и сотни миллиардов электрон-вольт стало возможным благодаря работам академика Владимира Иосифовича Векслера. В 1944 году он предложил знаменитый принцип «автофазировки» ускоряемых частиц, открывший новые горизонты перед ядерной физикой и физикой элементарных частиц. Этот принцип позволил создать новые типы ускорителей — фазотроны, синхротроны и синхрофазотроны.

●

Одной из важнейших проблем современной науки и техники является проблема управляемых термоядерных реакций, при которых легкие ядра объединяются в более тяжелые. Неуправляемые термоядерные реакции происходят при взрывах водородных бомб. Они приводят к высвобождению громадного количества ядерной энергии.

Теперь задача ученых — найти пути осуществления контролируемой термоядерной реакции. Ее решение открывает необозримые энергетические возможности, превращая воду в отличное ядерное топливо. Если управляемый термоядерный синтез будет технически реализован в больших масштабах, будущие поколения смогут черпать из океана энергию, запасов которой хватит на громадный срок. Но эта энергия может быть получена лишь после того, как мы научимся нагревать водород до огромных температур и удерживать его в таком необычном состоянии на протяжении заметных интервалов времени. Даже первые признаки ядерных взаимодействий в нагретом веществе можно надеяться наблюдать лишь при температуре около миллиона градусов. В этих условиях атомы любого вещества распадаются, образуя своеобразный газ из положительно и отрицательно заряженных частиц, именуемый плазмой *).

Основная и наиболее трудная задача, стоящая на пути к осуществлению интенсивных управляемых термоядерных реакций, заключается даже не в том, чтобы нагреть плазму до гигантских температур, а в том, чтобы изолировать такую плазму от стенок сосуда, в котором она заключена. Эта задача облегчается тем, что практически все частицы горячей плазмы несут на себе электрические заряды и потому могут удерживаться специально подобранными комбинациями магнитных полей.

Исследования управляемых термоядерных реакций были почти одновременно начаты в СССР и США в начале 50-х годов. Первоначально они велись в условиях сугубой секретности. Советский Союз первым в 1956 году рассекретил эти исследования. С тех пор наши работы в этой области физики неизменно занимают ведущее место в мире. На протяжении длительного времени после смерти И. В. Курчатова ими руководил академик Лев Андреевич Арцимович..

Советские физики первыми наблюдали появление нейтронного и рентгеновского излучения плазмы, причем они сразу же дали правильную оценку этим фактам, показав, что возникающие нейтроны не являются, к сожалению, результатом термоядерных реакций. Они первые построили ряд крупных установок для исследования горячей плазмы (Огра-1, Огра-2, Токамаки и т. д.). Им удалось впервые осуществить кратковременные термоядерные реакции в экспериментальных условиях и получить плазму с рекордными характеристиками. Особенно важным является резкое увеличение времени жизни горячей плазмы, достигнутое нашими учеными. Однако сравнение этих результатов с данными, необходимыми для работы промышленного термоядерного реактора, показывает, что хотя нашим физикам и удалось пройти большой путь, полное решение проблемы потребует еще немалого времени и усилий.

Приведенные в этой статье примеры убедительно свидетельствуют об огромном вкладе ученых Академии наук СССР в развитие современной физики.

---

*) См. статью Л. А. Арцимовича «Плазма — четвертое состояние вещества», «Квант», 1974, № 3.

АКАДЕМИЯ НАУК И ПРОГРЕСС МАТЕМАТИКИ

Б. В. Гнеденко

Великая Октябрьская социалистическая революция 1917 года существенно изменила роль Академии наук в жизни страны, формы ее работы и размах ее деятельности.

Академия наук не только начала численно расти, но, что самое важное, существенно изменила свое научное лицо: стала ближе к жизненным нуждам страны, к потребностям ее экономики, промышленности, культуры. В составе Академии наук появились крупнейшие научно-исследовательские учреждения, в которых под руководством выдающихся ученых производятся исследования наиболее важных проблем науки, а также рассматриваются вопросы, представляющие особый интерес для развития страны. Необходимые для этого расходы взяло на себя государство. Наука стала важной частью жизни советского общества, а Академия наук взяла на себя ответственную функцию руководителя советской науки, как принято у нас говорить, стала штабом советской науки.

Но такая перестройка не могла осуществляться сама по себе, она требовала огромных организационных усилий, постоянного внимания руководителей партии и правительства. История сохранила в воспоминаниях современников и в документах память о героических днях революции и гражданской войны, когда страна истекала кровью и напрягала все усилия, чтобы выстоять в отчаянной борьбе с контрреволюцией, интервентами, голодом, разрухой. Но и в эти дни В. И. Ленин и его соратники заботились о научном и техническом прогрессе страны, о выходе ее на передовые позиции во всех областях знания. Уже в 1918 году Ленин не только принял меры к сохранению лучших представителей русской дореволюционной науки, но и к привлечению их на сторону советской власти, к сотрудничеству с новым общественным строем, к активному решению тех научных проблем, которые стояли перед страной. Характерный эпизод, непосредственно относящийся к этим событиям, приведен М. Горьким в воспоминаниях о Ленине *).

«Помню, я был у него с тремя членами Академии наук. Шел разговор о необходимости реорганизации одного из высших научных учреждений Петербурга. Проводив ученых, Ленин удовлетворенно сказал:

— Это я понимаю. Это умники. Все у них просто, все сформулировано строго, сразу видишь, что люди хорошо знают, чего хотят. С такими работать — одно удовольствие. Особенно понравился мне этот...

Он назвал одно из крупнейших имен русской науки, а через день уже говорил мне по телефону:

Спросите С., пойдет он работать с нами?

*) Горький А. М., В. И. Ленин. — В кн.: «Воспоминания о В. И. Ленине». Ч. I, М., 1955, с. 383.

И когда С. принял предложение, это искренне обрадовало Ленина; потирая, руки, он шутил:

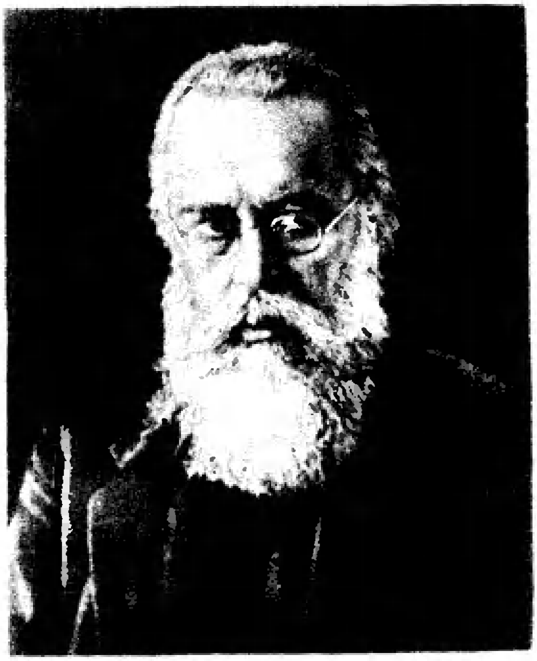
— Вот так, одного за другим, мы перетянем всех русских и европейских архимедов, тогда мир, хочет не хочет, а перевернется!»

Эти воспоминания касаются приема В. И. Лениным А. М. Горького, академиков В. А. Стеклова — вице-президента Академии наук, С. Ф. Ольденбурга — ученого секретаря Академии наук, а также президента Военно-медицинской академии В. Н. Тонкова, тогда еще не академика (он стал им в 1944 году).

Владимир Андреевич Стеклов (1864—1926)— ученик А. М. Ляпунова—воспринял от своего учителя интерес к проблемам математической физики и механики. Им были исследованы многочисленные задачи гидромеханики, теории упругости, механики твердого тела. Он построил теорию движения твердого тела в жидкости, теорию движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью, а также предложил ряд новых методов, вошедших в современную науку.

Как ни велики заслуги В. А. Стеклова в механике, основные усилия в своих исследованиях он направил на развитие математической физики, где им был сделан ряд фундаментальных открытий. Развитые им математические методы исследования физических задач прочно вошли в современную науку.

Труды Стеклова были замечены, и в 1912 году он был избран академиком, в 1916 году — членом правления, а в 1919 году — вице-президентом Академии наук. На плечи Стеклова было возложено тяжелое бремя забот по преобразованию Академии наук, ее обновлению и приближению ее интересов к нуждам страны. Однако этим не ограничилось его участие в строительстве фундамента советской науки. По его инициативе был организован Временный Комитет науки при Совете Народных Комиссаров СССР. При непосредственном участии В. А. Стеклова этот Комитет разработал и осуществил ряд постановлений, направленных на развитие советской науки и в том числе Академии. Внутри Академии В. А. Стеклов принимал участие в работе ряда комиссий—строительной, по изучению тропических стран, по делам Главной астрономической обсерватории, гидрологического института, а также был членом международной комиссии по изданию трудов Л. Эйлера. И, следует заметить, он активно участвовал в работе комиссий, заражая всех своей энергией, инициативой, целеустремленностью и темпераментом.



Академик В. А. Стеклов (1864—1926)

В самом начале 1919 года, в тяжелейший период гражданской войны, В. А. Стеклов вместе с академиками А. А. Марковым и А. Н. Крыловым обратился в физико-математическое отделение Академии наук с обоснованным предложением об образовании Математического кабинета. В известном смысле этот кабинет, названный Математическим кабинетом имени П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова, носил в себе зародыш будущего специализированного математического института. Возглавил этот кабинет сам автор предложения — В. А. Стеклов.

Идея создания кабинета в научном отношении себя оправдала, и уже через два года В. А. Стеклов счел необходимым представить в бюро физико-математического отделения записку с предложением и полноценным обоснованием необходимости организации в Академии наук специального научного учреждения — физико-математического института. В этой записке он писал: «Ни одна из естественных наук, если дело идет не о собирании сырого материала, а о действительном творчестве, не обойдется без математики, матери всех наук. Что же касается физики, поставленной впереди всех других наук, как и следует в проекте Ломоносовского института, то в настоящее время математика и физика до такой степени слились в одно целое, что иногда трудно отделить — где кончается математика и начинается физика» *).

Предложение В. А. Стеклова было единодушно поддержано как в Физико-математическом отделении, так и в Президиуме Академии наук. В результате в том же 1921 году ввиду «назревшей в науке потребности связать теснейшим образом физические науки с чисто математическими» был основан физико-математический институт Российской Академии наук. Директором института был избран В. А. Стеклов. Институт был организован на базе Математического кабинета, Физической лаборатории и Сейсмической сети.

Физико-математический институт просуществовал до 1934 года, а затем он был разделен на два самостоятельных учреждения — Математический институт им. В. А. Стеклова *) и Физический институт им. П. К. Лебедева. С первых дней существования самостоятельного математического института его возглавил академик И. М. Виноградов — крупнейший в современной науке специалист по теории чисел.

Отметим еще несколькими штрихами и другие стороны широкой, кипучей деятельности В. А. Стеклова. В годы гражданской войны он принимал деятельное участие в исследовании Курской магнитной аномалии, заведуя теоретической и вычислительной частью экспедиции северного района. Совет Труда и Обороны высоко оценил эту его работу, и в апреле 1923 года объявил ему благодарность. Немедленно после свержения царского режима В. А. Стеклов вместе с Горьким начал активную деятельность по популяризации науки. Он написал ряд биографических очерков о выдающихся ученых прошлого — П. Л. Чебышеве, А. М. Ляпунове, А. А. Маркове, А. Пуанкаре, В. Томсоне и других, две книги научно-биографического характера о М. В. Ломоносове и Г. Галилее, а также интересную книгу историко-философского содержания — «Математика и ее значение для человечества».

В некрологе, который был написан выдающимся деятелем советского просвещения А. В. Луначарским через день после смерти В. А. Стеклова, особое внимание уделялось философским взглядам покойного. Там было написано, что «... он был убежденным сторонником чисто эмпирического возникновения математики и с величайшим неодобрением относился к идеалистам и формалистам в этой науке. Он беспрестанно повторял, что математика — вся земная, но вместе с тем верил, что математическая формулировка явлений природы представляет собой предельную ясность

*) Протоколы заседаний физико-математического отделения АН, 1921. Приложение к протоколу первого заседания (10 января 1921 г.).

*) Имя В. А. Стеклова было присвоено институту в 1926 году.

истины. Он мне говорил как-то: «Люди непременно все согласятся между собой и притом по всем вопросам, но это будет тогда, когда наука о природе, то есть вся истина, будет математически формулирована» *).

Расскажем теперь о еще одном замечательном члене нашей Академии.

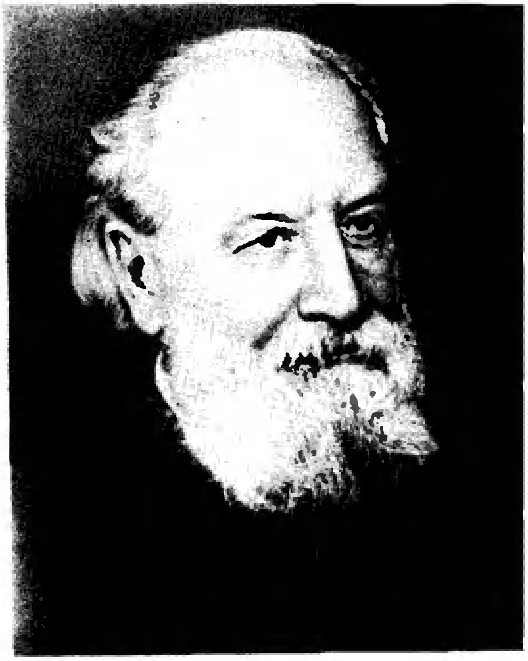
Алексей Николаевич Крылов (1863—1945) прожил долгую и полнокровную жизнь. Математика, механика, кораблестроение — в каждой из этих областей он сочетал талант ученого и энергию организатора, высокую культуру теоретических исследований и глубокое понимание роли практических приложений.

Свои первые научные работы А. Н. Крылов выполнил в компасной части Главного гидрографического управления. Эти работы были посвящены исследованию девиации магнитных компасов — отклонений стрелки компаса от направления на магнитный полюс Земли, вызванных влиянием намагниченных тел (стального корпуса судна) или электромагнитных полей судовых электрических и радиоустановок.

В течение года А. Н. Крылов работал на кораблестроительном заводе. Затем он поступил в Морскую академию, которую окончил за три года (в 1890 году), а после этого преподавал в ней почти 50 лет. В академии он руководил занятиями по математике, а с 1892 года стал также читать лекции по теории корабля.

Созданные А. Н. Крыловым учебные курсы составили подлинную классику корабельной науки, а принадлежащие ему методы вычисления основных характеристик корабля и ныне являются фундаментом теории непотопляемости судна. В этой области А. Н. Крылов следовал идеям замечательного русского флотоводца и ученого адмирала С. О. Макарова.

*) Луначарский А. В., В. А. Стеклов. — «Наша газета», 1926, 1 июня.



Академик А. Н. Крылов (1863—1945)

А. Н. Крылов развил и усовершенствовал теорию бортовой качки корабля, которая до его работ носила чисто приближенный характер, и по существу создал теорию килевой качки. Следует отметить, что до работ А. Н. Крылова создание подобной теории считалось невозможным ввиду «непреодолимых математических трудностей».

К концу 1890-х годов относятся работы А. Н. Крылова по теории колебаний корабля при волнении, эти работы до сих пор служат основой для решения важнейших вопросов прочности и мореходных качеств кораблей. Впоследствии (к 1908 году) А. Н. Крылов разработал специальную теорию вибрации судов и первым в мировой науке создал курс этой дисциплины. Строгая математическая теория колебаний различных упругих систем, содержащаяся в этом курсе, выходит далеко за рамки кораблестроения, она играет важнейшую роль во всей строительной механике. В развитии этой инженерной дисциплины выдающуюся роль сыграла и работа А. Н. Крылова «О расчете балок, лежащих на упругом основании» (1930 год).

В артиллерии А. Н. Крылову принадлежат исследования продольных и поперечных колебаний орудийных стволов во время выстрела, в так называемой «внешней баллистике» — исследование вращательного движения снаряда в полете. К этим исследованиям примыкают замечательные работы А. Н. Крылова по теории гироскопов и практическим приложениям гироскопических приборов и устройств для обеспечения устойчивости судов и летательных аппаратов.

С теории компасов началась научная деятельность Алексея Николаевича, и, спустя более чем 50 лет, он вновь обратился к этой теме, опубликовав в 1938—1940 годах цикл работ, посвященных теории девиации магнитных компасов, теории гироскопических компасов и вопросам влияния качки корабля на показания компаса. За эти работы А. Н. Крылов одним из первых в стране был удостоен Государственной премии.

Отдавая силы прежде всего развитию прикладных исследований, А. Н. Крылов внес важнейший вклад в развитие разделов математики и теоретической механики, требуемых для практических приложений. Еще в 1906 году он прочитал курс «О приближенных вычислениях», и поныне не потерявший своего значения для многих областей физики и техники.

«Причина, побудившая меня к составлению этого курса, следующая: в современных руководствах математического анализа преимущественное внимание обращается на вполне строгое установление основных понятий и на строгое доказательство всех получаемых из них выводов. Ввиду этого зачастую весьма обстоятельно доказывается существование решения какого-либо вопроса и устанавливается теоретическая возможность получения его с любою степенью точности, и гораздо меньшее внимание уделяется практической части дела, то есть действительному получению решения с данным, обыкновенно грубым, приближением, которое только и требуется в приложениях, но которое надо получить с возможно меньшею тратою труда и времени», — пишет А. Н. Крылов в предисловии к первому изданию этого курса — первого в мировой литературе курса приближенных вычислений.

В курсе А. Н. Крылова «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах» (1912 год) содержится ряд крупных результатов, относящихся к исследованию вынужденных колебаний упругих систем и способов улучшения сходимости тригонометрических рядов. Последний пример убедительно демонстрирует глубокое теоретическое значение работ А. Н. Крылова, стимулируемых, казалось бы, «чисто прикладными» задачами. До сих пор могучая фигура А. Н. Крылова является опровержением всех теорий о делении науки на «чистую» и «прикладную». Например, в 1931 году А. Н. Крылов получил выдающиеся результаты в такой «далекой» от его традиционных интересов области, как небесная механика, предложив наилучший из всех существующих метод решения так называемого «векового уравнения», а ведь над этой задачей в свое время работали всемирно известные ученые — Ж. Лагранж, П. Лаплас, У. Леверье, К. Якоби!

А. Н. Крылов был не только ученым-энциклопедистом, но и выдающимся знатоком истории науки, его труды по разработке наследия великих классиков науки — И. Ньютона, Л. Эйлера, К. Ф. Гаусса, Ж. Лагранжа, П. Л. Чебышева — сами ныне являются классическими, ему же принадлежат образцовые переводы с латинского языка на русский таких трудов, как «Математические начала натуральной философии» И. Ньютона (с рядом важных дополнений) и «Новая теория движения Луны» Л. Эйлера. Им же написан ряд ярких очерков о жизни и деятельности замечательных ученых, его предшественников и современников. А его книга «Мои воспоминания» — это не только выдающийся вклад в историю русской и мировой науки и культуры, но и замечательно талантливый, живой рассказ о всей жизни общества, которое по праву может гордиться таким достойным своим членом.

Алексей Николаевич Крылов был Учителем в подлинном и высоком смысле этого слова. Он создал школу кораблестроителей, из которой вышли многие замечательные ученые: В. Л. Поздюнин, П. Ф. Папкович, Ю. А. Шиманский и другие.

А. Н. Крылов был и замечательным изобретателем, он построил первую в России машину для интегрирования дифференциальных уравнений, ряд важных корабельных и артиллерийских приборов.

И, конечно, А. Н. Крылов памятен нам как замечательный гражданин, общественный деятель, патриот. Еще в дореволюционные годы он начал применять достижения науки к нуждам обороны страны: с 1900 года А. Н. Крылов заведовал Опытовым бассейном для испытаний моделей судов, в 1908—1910 годах он был Главным инспектором кораблестроения и председателем Морского технического комитета, в последующие годы консультировал на Металлическом, Путиловском, Обуховском и других заводах. С новым размахом развернулась его работа после Великой Октябрьской социалистической революции, за год до которой А. Н. Крылов был избран действительным членом Академии наук. В 1919 году А. Н. Крылов стал во главе Морской Академии. В 1921—1927 годах А. Н. Крылов в составе комиссии для возобновления научных связей находился в заграничной командировке, выполняя важное задание Советского правительства: он наблюдал за постройкой судов, заказанных для советского флота. По возвращении Алексей Николаевич продолжал руководить Морской академией, активно участвуя в решении важнейших технических вопросов военного и гражданского судостроения. В годы Великой Отечественной войны эта многогранная деятельность А. Н. Крылова приобрела особо важное значение.

В 1943 году за выдающиеся достижения в развитии советской науки и оборонного дела Алексей Николаевич Крылов был удостоен звания Героя Социалистического Труда, трижды он награждался орденами Ленина. Ныне имя А. Н. Крылова носит Военно-морская академия в Ленинграде.

●

С организацией математического института им. Стеклова характер математических исследований в Академии наук резко изменился. Прошло время великих математиков-одиночек, и наступил период работы больших коллективов над проблемами, которые требуют не только выдвижения крупных идей, но и систематической работы многих ученых над различными аспектами одной проблемы. Сказанное совсем не означает, что талант отдельного ученого перестал играть роль в развитии науки, но он перестал быть единственной движущей силой. Все большую и большую роль стал играть организованный коллектив, мысль которого и стремления направлены в одну сторону, на определенные решающие вопросы науки.

Влияние Академии наук распространилось и на высшие учебные заведения, поскольку они стали широко привлекаться к совместным крупным исследованиям. Ученые, работающие в вузах, включались в специальные комиссии, создаваемые Академией наук для решения конкретных научных проблем.

Академические институты в настоящее время отвечают за созыв Всесоюзных съездов по областям науки, а также Всесоюзных научных совещаний. Редколлегии основных научных журналов также сосредоточены в Академии наук. Время от времени Академия наук издает проблемные записки, в которых подводятся итоги исследований по определенной проблеме и намечаются перспективы ее дальнейшего развития. В академических институтах способные ученые заняты исключительно научными исследованиями. Окружающий коллектив, увлеченный научными изысканиями, стимулирует поиски в наиболее трудных вопросах науки.

Общение с аспирантами и организация научных семинаров, доступ на которые открыт для всех желающих, обеспечивают постоянные связи с молодежью, стремящейся к научным исследованиям и находящейся еще на первичной стадии формирования творческих интересов и научных идеалов.

Вопрос о подготовке научной смены, о более широком привлечении молодежи к научным исследованиям с особой остротой возник в конце двадцатых годов, когда страна оправилась от разрухи, вызванной первой мировой и гражданской войнами, и перешла к развитию промышленности, подъему экономики. В результате уже в 1928 году, а затем вновь в ноябре 1929 года ЦК ВКП (б) принял постановления о расширении и улучшении подготовки научно-исследовательских кадров как для возрастающей сети вузов, так и для Академии наук. Одни университеты с этой огромной задачей справиться не могли, и поэтому вполне естественно, что к ее решению была привлечена и Академия наук. Аспирантура в Академии была организована в 1929 году, в том же году был объявлен прием. Заявлений было подано 365. Специальная комиссия по приему в аспирантуру, в состав которой входили крупнейшие ученые, приняла лишь 69 человек и притом всех в кандидатскую аспирантуру. На следующий год принято было уже 97 человек (из них один в докторантуру). В 1931 году Академия приняла уже 207 человек, причем 7 кандидатов были приняты в докторантуру.

Нужно сказать, что организация аспирантуры в институтах Академии принесла замечательные результаты. Многие ее воспитанники выросли в крупнейших представителей науки наших дней и внесли заметный вклад в прогресс не только избранных ими направлений научных исследований, но и в развитие многих областей практики. В качестве примера я позволю себе привести следующий факт: аспирантом Математического института им. В. А. Стеклова в 1934—1937 годах был М. В. Келдыш, который получил результаты первостепенного значения в теории функций, теории дифференциальных уравнений и аэродинамике. Им были объяснены страшные для авиации прошлого явления флаттера (колебаний типа полоскания флага на ветру) и вхождения в штопор, а также указаны методы борьбы с ними. Эти научные результаты были широко использованы нашей промышленностью в период Великой Отечественной войны. В настоящее время М. В. Келдыш является президентом Академии наук и проявляет глубокое понимание нужд не только математики и механики, но и других наук.

Из аспирантуры Академии вышли многие выдающиеся представители науки союзных республик. Им пришлось взять в свои руки организацию научных исследований и подготовку национальных научных кадров во многих случаях буквально на пустом месте. В этом им помогла Академия, которая организовала в союзных республиках свои филиалы, позднее преобразованные в республиканские Академии наук. Сейчас математические институты в большинстве Академий союзных республик занимают твердые позиции в прогрессе науки, а в некоторых направлениях занимают руководящие позиции.

Великая Отечественная война и последовавший за ней период восстановления народного хозяйства показали важность математических методов. Математики Академии наук, наряду со всем советским народом, внесли свой весомый вклад в дело победы. Здесь и участие в расчетах новых конструкций, и составление таблиц бомбометания, и проблемы контроля качества промышленной продукции, и помощь в поисках полезных ископаемых новыми методами. Родина высоко оценила эту работу советских математиков, в том числе сотрудников Академии наук.

В послевоенное время математики Академии наук приняли активное участие в решении важнейших проблем, связанных с восстановлением народного хозяйства и укреплением обороны страны. Овладение атомной энергией, завоевание космоса, создание современных вычислительных машин и разработка методов программирования, решение проблем оптимального управления процессами — во всех этих работах содержится огромный труд советских математиков. Но наряду с этим никогда не прекращается систематический поиск новых математических методов исследования, решения задач самой математической науки, построения ее теории.

В послевоенные годы выяснилось, что одного института им. Стеклова уже не хватает для полнокровного прогресса советской математики. В недрах этого института выросли новые крупные научные учреждения — Ленинградское отделение Математического института (ЛОМИ), Институт прикладной математики, Вычислительный центр Академии наук, Уральский математический институт. Но, пожалуй, самым крупным событием в развитии Академии наук следует считать образование ее Сибирского отделения. Инициатором организации этого отделения и бессменным его руководителем является крупный представитель теории функций комплексного переменного и гидромеханики — академик М. А. Лаврентьев. Представители этого отделения участвуют как в разработке чисто прикладных проблем, так и в решении труднейших теоретических проблем математики. Теперь начинается новый этап развития Академии — создание Дальневосточного научного центра.

Математики, работающие и работавшие в Академии в советский период ее существования, могут с гордостью оглянуться на пройденный путь. Они внесли неоценимый вклад в развитие теоретической математики и ее применений буквально во всех областях знания. В результате их трудов существенно развились многие области математической науки, ряд из них существенно изменил свое содержание, появились новые направления исследований.

Академия сильна не только тем, что в ней трудятся многие выдающиеся ученые, но и своими постоянными связями с университетами и другими учебными заведениями страны. Академические институты ежегодно впитывают в себя научную молодежь.

В свои 250 лет Академия наук по-прежнему молода, она берется за труднейшие научные проблемы и успешно их решает, она постоянно принимает участие в решении актуальных проблем, стоящих перед нашей страной, она сама не остается неизменной, а растет и развивается так же, как развивается вся наша страна.

Леонард Эйлер (1707—1783)

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

Б. Н. Делоне

За время существования Академии наук в России, видимо, самым знаменитым ее членом был математик Леонард Эйлер. В этой статье мы рассказываем о его жизни и некоторых его математических работах.

XVII век был для математики необычным веком. Декарт и Ферма создали аналитическую геометрию, а Ньютон и Лейбниц — дифференциальное и интегральное исчисления. Эти два величайших достижения математики подняли человечество на существенно новую научную ступень. Открылась возможность решать задачи, совершенно не доступные прежним эпохам. Методы, развитые в интегральном и дифференциальном исчислениях, позволили решать задачу о касательной, о максимумах и минимумах исследуемой переменной величины, о кривизне линии в разных ее точках, а после того как Ньютону и Лейбницу удалось доказать знаменитую теорему анализа, связывающую дифференциальное и интегральное исчисления, оказалось возможным вычислять площади, объемы, находить центры тяжести таких фигур, для которых до того нельзя было и мечтать это сделать. После всех этих достижений наиболее глубокие дальнейшие результаты в области анализа*) принадлежат Якову Бернулли, его младшему брату Иоганну и сыновьям Иоганна — Николаю и Даниилу Бернулли — швейцарцам из небольшого города Базеля на Рейне.

*) Математическим анализом или анализом бесконечно малых обычно называют тесно связанные между собой дифференциальное и интегральное исчисления.

Но первым, кто в своих работах стал возводить последовательное здание анализа бесконечно малых, был ученик Иоганна Бернулли — Леонард Эйлер. Только после его исследований, изложенных в грандиозных томах его трилогии «*Введение в анализ*», «*Дифференциальное исчисление*» и «*Интегральное исчисление*» анализ стал вполне связной наукой — одним из самых глубоких научных достижений человечества.

Биография Эйлера

Эйлер родился в швейцарском городе Базеле в 1707 году. В 13 лет Эйлер поступил на факультет искусств Базельского университета. Среди других предметов на этом факультете изучались элементарная математика и астрономия, которые преподавал Иоганн Бернулли. Вскоре Бернулли заметил талантливость юного слушателя и начал заниматься с ним отдельно. Эйлер стал бывать в доме своего учителя, и между ним и сыновьями Иоганна Бернулли — Николаем и Даниилом—возникла дружба, сыгравшая очень большую роль в жизни Эйлера.

Когда в 1724 году по указу Петра I была организована Академия наук в Петербурге, из-за недостатка собственных ученых было решено привлечь зарубежных специалистов; перспектива работы в новом крупном центре науки и образования была для многих весьма заманчивой. В числе первых получили приглашение несколько математиков — видный последователь Лейбница Я. Герман, преподававший в университете Франкфурта-на-Одере, а также молодые Николай и Даниил Бернулли — друзья Эйлера. Осенью 1725 года все трое базельцев были уже в Петербурге. В своей автобиографии Эйлер рассказывает, что он «преисполнился невыразимым желанием поехать вместе с ними в 1725 году в Петербург»*). Друзья исхлопотали приглашение Эйлера на вакантную должность.

В Петербурге имелись самые благоприятные условия для расцвета гения Эйлера: материальная обеспеченность, возможность заниматься любимым делом, наличие ежегодного журнала для публикации трудов. Здесь же работала самая большая тогда в мире группа специалистов в области математических наук, в которую входили, кроме упомянутых Я. Германа и Д. Бернулли (его брат Николай скончался в 1726 г.), разносторонний Х. Гольдбах, с которым Эйлера связывали общие интересы к теории чисел и другим вопросам, автор работ по тригонометрии Ф. Х. Майер, астроном и географ Ж. Н. Делиль, математик и физик Г. В. Крафт и другие. С этого времени петербургская Академия стала одним из главных центров математики в мире.

Открытия Эйлера, которые благодаря его оживленной переписке нередко становились известными задолго до издания, делают его имя все более широко известным. Улучшается его положение в Академии наук: в 1727 году он начал работу в звании адъюнкта, то есть младшего по рангу академика; в 1731 году он стал профессором физики, то есть действительным членом Академии, а в 1733 году получил кафедру высшей математики, которую до него занимал Д. Бернулли, возвратившийся в этом году в Базель. Рост авторитета Эйлера нашел своеобразное отражение в письмах к нему его учителя И. Бернулли. В 1728 году Бернулли обращается к «ученейшему и даровитейшему юному мужу Леонарду Эйлеру», в 1737 году — к «знаменитейшему и остроумнейшему математику», а в 1745 году — к «несравненному Леонарду Эйлеру — главе математиков»*).

... В конце 1740 года власть в России попала в руки регентши Анны Леопольдовны и ее окружения. В столице сложилась тревожная обстановка. В это время прусский король Фридрих II задумал возродить основанное еще Лейбницем Общество наук в Берлине, долгие годы почти бездействовавшее. Через своего посла в Петербурге король пригласил Эйлера в Берлин. Эйлер, считая, что «положение начало представляться довольно неуверенным», приглашение принял.

Покинув Петербург, Эйлер сохранил самую тесную связь с русской Академией наук, в том числе официальную: он был назначен почетным членом, и ему была определена крупная ежегодная пенсия, а он, со своей стороны, взял на себя обязательства в отношении дальнейшего сотрудничества. Он закупал для нашей Академии книги, физические и астрономические приборы; он подбирал за рубежом сотрудников, сообщая подробнейшие характеристики возможных кандидатов; редактировал математический отдел академических записок, выступал как арбитр в научных спо-

---

*) См. Историко-математические исследования, вып. X, с. 14.

*) За эти интересные сведения я горячо благодарю Адольфа Павловича Юшкевича.

рах между Петербургскими учеными, присылал темы для научных конкурсов, посылал информацию о новых научных открытиях и т. д.

Из Берлина Эйлер, в частности, вел переписку с Ломоносовым, в творчестве которого он высоко ценил счастливое сочетание теории с экспериментом. В 1747 году он дал блестящий отзыв о присланных ему на заключение статьях Ломоносова по физике и химии, чем немало разочаровал влиятельного академического чиновника Шумахера, крайне враждебно относившегося к Ломоносову.

Эйлер пробыл в Берлине 25 лет и так же напряженно работал, как в Петербурге. Однако обострение отношений с королем Пруссии Фридрихом II (который, хотя и преклонялся перед Вольтером и французской культурой, но по существу был типичным солдафоном) привело к тому, что Эйлер в 1766 году решил вернуться в Петербургскую Академию наук, где он был встречен с величайшим почетом и устроен так хорошо, как только было можно.

Последние 16 лет жизни Эйлер опять жил в Петербурге. Там он и умер в 1783 году.

Эйлер отличался несравненной работоспособностью и за свою жизнь написал около 900 научных работ, и это несмотря на то, что он потерял один глаз еще в возрасте 31 года и почти ослеп на второй в 66 лет.

Нет ученого, имя которого упоминалось бы в учебной математической литературе столь же часто, как имя Эйлера. Достаточно открыть 48 том второго издания Большой Советской Энциклопедии на страницах 338—340, чтобы найти сведения о двадцати формулах, уравнениях, интегралах и т. д., носящих имя Эйлера. В учебниках для высшей школы их еще больше; а многие введенные им в обиход теоремы и методы давно перестали связывать с чьим-либо именем. Даже в средней школе логарифмы и тригонометрию изучают до сих пор в значительной степени «по Эйлеру».

Кроме математики, Эйлер занимался также многими другими, в том числе и совсем прикладными, вопросами — оснасткой корабля, картографией, механикой, астрономией, физикой, диоптрикой. Но все же главные достижения Эйлера относятся к математике.

Полное собрание сочинений Эйлера рассчитано на 72 тома (вышло уже 62 больших тома). 30 из них посвящено математике, 31 содержит его работы по механике и астрономии, 11 будут содержать работы по физике и другим предметам. В процентном отношении работы по математике распределяются (по объемам, а это дает лучшую характеристику, чем по числу работ, так как работы чрезвычайно отличаются по размерам) так: анализ — 60%, геометрия — 17%, теория чисел — 13%, алгебра — 7%, теория вероятностей — 3%.

Внутри анализа особенно большое место занимают работы по интегральному исчислению — 33%, по дифференциальным уравнениям — 25%, по рядам — 22% и по вариационному исчислению — 11%. В остальные 9% входят том «Дифференциальные исчисления» и первый том «Введения в анализ бесконечно малых». В целом эта статистика довольно верная.

Перейдем теперь к разбору некоторых математических работ Эйлера.

Работы Эйлера по теории чисел

После работ древнегреческого математика Диофанта уже в новое время (в 1600-е годы) французский математик, советник суда в Тулузе, П ь е р Ф е р м а рассмотрел ряд глубоких задач элементарной теории чисел и сообщил полученные им результаты, но по обычаю того времени скрыл их доказательства. Эйлер нашел доказательства всех теорем Ферма, показал неверность одной из них, а знаменитую «в е л и к у ю т е о р е м у

Ферма»*), не доказанную и не опровергнутую и до сих пор, о целых решениях уравнения $x^n+y^n=z^n$, доказал для $n=3$ и $n=4$.

Эйлер начал последовательно строить элементарную теорию чисел. Он начал с теории степенных вычетов. Эта теория исследует остатки (вычеты), которые получаются, если делить степени фиксированного натурального числа a на простое число p (модуль), не являющееся делителем a. Оказывается, вычет a^{p-1} всегда равен единице. (Это так называемая «малая теорема Ферма»*). Эйлер дал и ее доказательство.) Но a^m при делении на p может дать остаток, равный единице, и при m, меньшем чем $p-1$. Тогда m есть делитель $p-1$ и вычеты степеней a до $p-1$-й повторяются периодически. Особенно важны те значения a, для которых при делении на p остаток равен 1 только при показателе, равном $p-1$, а не при меньших. Их Эйлер назвал первообразными корнями p. Для таких значений a степени $a, a^2, \ldots, a^{p-1}$ дают все $p-1$ различных ненулевых возможных остатков по модулю p. Если два числа b и c имеют такие же вычеты, как a^β и a^γ, то β и γ называются индексами чисел b и c. При умножении b на c индексы складываются (то есть получается аналогия с теорией логарифмов).

Далее Эйлер занялся квадратичными вычетами. Назовем a квадратичным вычетом простого числа p, если вычет a такой же, как у некоторого квадрата. Все вычеты разбиваются на две совокупности: квадратичные вычеты и квадратичные невычеты p (при $p>2$ их равное число, нулевой вычет не рассматривается).

Если a — произведение нескольких сомножителей, то квадратичная вычетность или невычетность a по модулю p зависит от того, какое число его сомножителей — невычеты. Если это число нечетно, то a — невычет, если четно — вычет. Самый трудный вопрос, связанный с квадратичными вычетами,— найти при фиксированном a вид тех простых чисел p, для которых a является квадратичным вычетом. Эйлер заметил, что это те p, которые находятся в некоторых определенных арифметических прогрессиях, зависящих от a. Это так называемый квадратичный закон взаимности*).

Эйлер также много лет занимался решением неопределенных уравнений 2-й степени с двумя неизвестными. Еще Ферма в 1651 году предложил всем математикам мира показать, что при целом положительном A, не являющемся квадратом, неопределенное уравнение $x^2-Ay^2=1$ (его теперь называют уравнением Пелля) имеет бесконечно много решений (x, y) в целых числах. Эйлер исследовал общее неопределенное уравнение $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, где a, b, c, d, e и f — целые числа и x и y также ищутся целые.

Такие же уравнения 1-й степени $ax+by+c=0$ были решены еще в древности: если c делится на наибольший общий делитель a и b, то такое уравнение всегда имеет бесконечно много решений.

Эйлер понял, что для уравнения 2-й степени задача, поставленная Ферма, сводится к доказательству того, что квадратный корень из натурального числа A (если A не квадрат) всегда разлагается в периодическую непрерывную дробь**)

*) См. «Квант», 1972, № 8.

**) См. статью С. Г. Гиндикина «Малая теорема Ферма», «Квант», 1972, № 10.

*) Ему посвящена статья С. Г. Гиндикина «Золотая теорема», помещенная в «Кванте», 1973, № 1.

**) См. статью Н. М. Бескина в «Кванте» № 1 за 1970 год.

$$\sqrt{A}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}+\ldots}$$

Очень большую роль в упорядочивании элементарной теории чисел, сыграла и введенная Эйлером функция $\varphi(n)$, равная числу чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Во всех этих трех фундаментальных вопросах (которые больше двух столетий после Эйлера и составляли основной объем элементарной теории чисел)— степенные вычеты, закон взаимности, решение неопределенного уравнения 2-й степени—Эйлер ушел очень далеко, однако во всех трех его постигла неудача: существование первообразного корня для всякого p доказал Гаусс, и как доказал! Закон взаимности тоже доказал Гаусс, причем дал 6 разных, но, правда, весьма трудных доказательств. Периодичность разложения $\sqrt{A}$ доказал Лагранж в 1768 году, и тем самым, как это ранее показал уже Эйлер, решил общее уравнение 2-й степени и, в частности, уравнение Пелля. Эта работа Лагранжа несомненно является коронным бриллиантом в венке славы Лагранжа как математика. Она имела в дальнейшем целый ряд замечательных обобщений, над которыми работают еще и сейчас.

В переписке Эйлера с его другом академиком Петербургской Академии наук Гольдбахом находятся две знаменитые «задачи Гольдбаха»: *доказать, что всякое нечетное натуральное число есть сумма трех простых чисел, а всякое четное — двух.* Первое из этих утверждений было при помощи весьма замечательного метода доказано уже в наше время (1937 г.) академиком И. М. Виноградовым, а второе не доказано до сих пор.

Эйлеру принадлежит инициатива создания и второй части теории чисел — аналитической теории чисел, в которой глубочайшие тайны целых чисел, например, распределение простых чисел в ряду всех натуральных чисел, получаются из рассмотрения свойств некоторых аналитических функций.

Эйлер первый начал рассматривать функцию «дзета» $\zeta(s)=\sum\frac{1}{n^s}$ *), где сумма берется по всем натуральным числам n. Он доказал свою знаменитую формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

где $\prod$ обозначает произведение, которое берется по всем простым числам p. Из этой формулы он получил новое аналитическое доказательство бесконечности числа простых чисел, из нее же он вывел (правда, без достаточно строгого обоснования) приближенное равенство

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\approx\ln\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}$$

(здесь p, как и выше,— простые числа, а n — целые).

Из этого равенства возник наиболее сильный в настоящее время метод исследования закона распределения простых чисел p в натуральном ряде чисел и в прогрессиях. С его помощью П. Л. Чебышев впоследствии установил, как ведет себя функция $\pi(x)$ — число простых чисел p, не превышающих числа x — при x, стремящемся к бесконечности**), а Ж. Адамар, используя глубочайшие соображения Римана о поведении $\zeta(s)$ в комплексной плоскости доказал предельный закон:

$$\pi(x):\frac{x}{\ln x}\to 1.$$

---

*) Σ — знак суммирования; например, запись $\sum_{n=k}^{l} f(n)$ обозначает такую сумму: $f(k)+f(k+1)+\ldots+f(l)$.

**) См. «Квант», 1971, № 5.

Созданная Эйлером аналитическая теория чисел продолжает свое развитие и в наши дни. Один из самых глубоких в ней методов создан в 1934 году академиком И. М. Виноградовым.

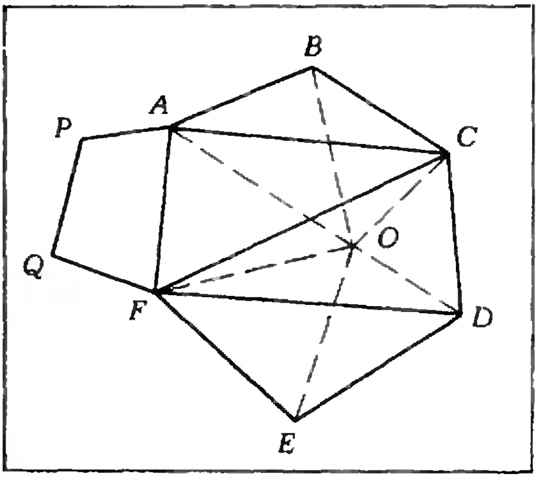
Эйлер также интересовался вопросом арифметической природы чисел. От него идет постановка Гольдбахом вопроса о трансцендентности чисел α^β, где α и β — алгебраические числа*). Эта задача была решена уже в наше время (1930 г.) членом Академии наук СССР А. О. Гельфондом.

В работах Эйлера по теории чисел поражает не только глубина идей и тонкость методов, но и то, что он никогда не останавливался перед вычислительными трудностями задачи.

Большая часть работ Эйлера по теории чисел, напечатанных в разных академических изданиях, была затем собрана в издании его ученика Фусса под названием «Commentationes Arithmeticae Collectae», то есть «Собрание арифметических исследований».

Работы Эйлера по геометрии

Всех работ Эйлера по геометрии 75, и они занимают три из томов полного собрания его сочинений. Часть из них хотя и любопытна, но не очень важна. Некоторые же просто составили эпоху. Во-первых, Эйлера надо считать одним из зачинателей исследований по геометрии в пространстве вообще. Он первый дал связное изложение аналитической геометрии в пространстве (во «Введении в анализ») и, в частности, ввел так называемые углы Эйлера, позволяющие изучать повороты тела вокруг точки.



В работе 1752 года *«Доказательство некоторых замечательных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями»* Эйлер дал доказательство того, что у выпуклого многогранника числа В — его вершин, Р — его ребер и Г — его граней всегда связаны соотношением В—Р+Г=2. Это в некотором смысле первая в истории математики крупная теорема топологии*) (самой глубокой части геометрии), которая (в несколько более общем виде) не утратила значения до сих пор.

Доказательство Эйлера основано на последовательном уничтожении вершин многогранника. Если бы его излагать сейчас, надо было бы сказать следующее. Всякий выпуклый многогранник определяется заданием своих вершин — он есть «выпуклая оболочка» своих вершин, то есть наименьшее выпуклое тело, которому принадлежат эти вершины**). Пусть числа его вершин, ребер и граней суть В, Р и Г. Выкинем одну из его вершин O и рассмотрим выпуклый многогранник, вершинами которого яв-

*) Напомним, что число α называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где все числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые. Не алгебраические числа называются трансцендентными.

*) Топология изучает свойства фигур, не меняющиеся, если фигуру можно как угодно растягивать, сжимать и изгибать, но нельзя склеивать и рвать.

**) Выпуклым называется тело, которое наряду с двумя точками содержит и соединяющий их отрезок.

ляются оставшиеся В—1 вершин. Как будет выглядеть этот многогранник? Если грани, сходящиеся в вершине O, все треугольные, их k, и многогранник рассматривать как поверхность, то все эти k граней исчезнут и исчезнут k их боковых ребер, исходящих из O. Ребра же, являющиеся их основаниями, все останутся и образуют, вообще говоря, неплоский многоугольник $ABCDEF$ (приложенная фигура и обозначения на ней взяты из работы Эйлера). Этот многоугольник окажется покрытым новыми треугольными гранями, такими, как ABC, ACF, CFD и FDE, имеющими вершины только в точках A, B, C, D, E и F. Число этих граней будет всегда $k-2$. А число их ребер, отличающихся от ребер AB, BC, CD, DE, EF и FA будет всегда $k-3$. Если никакие две из этих треугольных граней не лежат в одной плоскости, то у получившегося после выбрасывания вершины O многогранника будет число вершин В—1, число ребер $\text{Р} - k + k - 3 = \text{Р} - 3$, число граней $\Gamma - k + k - 2 = \Gamma - 2$. Поэтому наша знакопеременная сумма, называемая характеристикой Эйлера многогранника, не изменится. Если некоторые соседние новые треугольные грани окажутся в одной плоскости, то настолько же меньше будет разных новых граней, насколько ребер, по которым они сложены, и поэтому эта сумма тоже будет такая же. Наконец, если какая-либо грань из сходившихся в вершине O, будет не треугольная, например AOF будет иметь продолжение $FQPA$, то часть ее $FQPA$ при выбрасывании O сохранится, но зато появится новое ребро AF (которое было диагональю у грани $AOFPQ$), и характеристика по-прежнему не изменится. Выкидывая так вершину за вершиной, мы, наконец, дойдем до того, что все оставшиеся вершины будут лежать в одной плоскости. Весь многогранник сведется к «моноэдру», то есть к одному выпуклому многоугольнику, сосчитанному дважды. Но если число сторон этого многоугольника l, то и число вершин его l, а число его «граней» 2, и поэтому его характеристика $l - l + 2$ будет равна 2. Но при каждом очередном выбрасывании вершины характеристика, как мы видели, не менялась, а следовательно, и характеристика $\text{В} - \text{Р} + \Gamma$ исходного многогранника тоже равна 2*).

В работе «*Исследование о кривизне поверхностей*» (1760 год) Эйлер рассматривает вопрос, до того никем подробно не изучавшийся. Ответ на вопрос о том, какова изогнутость линии на плоскости в данной ее точке, состоит просто в нахождении радиуса такой окружности, которая так же изогнута. Он был решен Ньютоном. Этот радиус равен $R = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{y''}$, где $y = f(x)$ — уравнение линии, а y' и y'' — ее первая и вторая производные в этой точке.

Для поверхности все гораздо сложнее. Метод исследования этого вопроса очень характерен для Эйлера. Пусть M — точка поверхности. Он сначала находит формулу радиуса кривизны R в точке M для кривой, получающейся сечением поверхности совсем произвольной плоскостью, проходящей через M. Формула получается сложной. Затем он рассматривает только н о р м а л ь н ы е сечения — такие, когда секущая плоскость проходит через н о р м а л ь (то есть через перпендикуляр) в M к плоскости, касающейся поверхности в точке M. Формула становится проще. Наконец, он обнаруживает, что есть такие два взаимно перпендикулярных («г л а в н ы е») нормальные сечения, радиусы кривизны для которых R_1 и R_2 — наибольший и наименьший. При их помощи получается уже совсем простая формула для радиусов кривизны любого нормального сечения.

*) Постарайтесь самостоятельно доказать все те промежуточные утверждения, которые Эйлер счел очевидными.

Работа 1769 года *«Об ортогональных траекториях»* Эйлера содержит блестящие соображения о получении с помощью функции комплексной переменной из уравнений двух взаимно ортогональных семейств кривых на поверхности (то есть таких линий, как меридианы и параллели на сфере) бесконечного числа других взаимно ортогональных семейств. Работа эта в истории математики оказалась очень важной. В следующей работе 1771 года *«О телах, поверхность которых может быть развернута в плоскость»* Эйлер доказывает знаменитую теорему о том, что любая поверхность, которую можно получить, лишь изгибая плоскость, но не растягивая ее и не сжимая (как лист бумаги, который легко изгибается, но почти нерастяжим), если она не коническая и не цилиндрическая (то есть не получается движением образующей прямой, проходящей постоянно через одну точку или параллельно самой себе), представляет собой совокупность касательных к некоторой пространственной кривой (ее ребру возврата).

Столь же замечательны работы Эйлера по картографическим проекциям.

В заключение описания геометрических работ Эйлера мы вполне присоединяемся к высказыванию немецкого математика В. Коммереля: «Слава и заслуги Гаусса не пострадают, если мы укажем на то, что ряд мыслей и методов, которые Гаусс так блестяще использовал в «Disquisitiones generales» (правда, частично лишь в специальной форме или лишь неполно формулированные), имеется уже у Эйлера, например сферическое отображение (когда куску поверхности ставится в соответствие кусок сферы радиуса 1, состоящий из всех таких точек, в которых радиусы этой сферы параллельны нормалям к поверхности в точках этого ее куска), задание поверхности в параметрической форме, совпадение линейных элементов как условие наложимости при изгибании, исследование геодезических линий (то есть кратчайших линий на поверхности между двумя ее точками) при помощи угла, который они образуют с кривыми некоторого семейства на поверхности и другие».

Можно себе представить, каким откровением для математиков той эпохи явились хотя бы работы Эйлера о кривизне поверхностей и о развертывающихся поверхностях. Работы же, в которых Эйлер исследует отображение поверхности, сохраняющие подобие в малом (конформные отображения), основанные на теории функций комплексного переменного, должны были казаться прямо-таки трансцендентными. А работа о многогранниках начинала совсем новую часть геометрии и по своей принципиальности и глубине стояла в ряду с открытиями Эвклида.

О работах Эйлера по анализу

Работ этих так много, и они столь всеобъемлющи, что мы не решаемся здесь давать их описания. Скажем только, что он упростил и дополнил целые большие отделы анализа бесконечно малых, интегрирование функций, теорию рядов, дифференциальных уравнений, которые были начаты уже до него, так, что они приобрели примерно ту форму, которая за ними в большой мере остается и до сих пор. Эйлер, кроме того, начал целую новую главу анализа — вариационное исчисление. Это его начинание вскоре подхватил Лагранж и получилась новая наука.

Влияние Эйлера на развитие математики в России

Плодотворное влияние Эйлера испытывали практически все творчески работающие математики в России. Стиль и направленность работ Эйлера оказали определяющее влияние на все дальнейшее развитие математики в Петербурге (М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев и его школа: А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. М. Ляпунов, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной, В. А. Стеклов, И. М. Виноградов и др.). Знаменитая Петербургская математическая школа есть, собственно говоря, школа Эйлера—Чебышева. Это одна из самых своеобразных и глубоких математических школ в мире. Основным ее принципом является принцип Эйлера—Чебышева: исходя из трудной математической задачи, и часто такой, которую ставит другая наука или техника, строить большие и глубокие математические теории, а при решении математических задач всегда доводить их решение до удобного на практике результата, то есть до числа, не останавливаясь ни перед какими вычислительными трудностями.

Большая математика в Москве стала развиваться в начале двадцатого века (Д. Ф. Егоров, Н. Н. Лузин). Молодое московское направление, быть может, более принципиальное, более глубокое и более современное, чем петербургское, значительно углубило и усилило нашу математику.

После переезда Академии наук в Москву (1935 г.) постепенно произошло слияние обоих направлений, петербургского и московского, которые вместе со школами Казани, Киева и других научных центров и дали то, что мы теперь называем советской математикой.

Ампер славился своей рассеянностью. Про него рассказывали, что однажды он с сосредоточенным видом варил в воде три минуты свои часы, держа яйцо в руке. Другой часто приводимый случай: Ампер шел по улице, производя, как всегда, в уме сложные расчеты. Он нисчуть не удивился, когда прямо перед ним возникла прекрасная черная доска, спокойно достал из сюртука непременный кусок мела и стал записывать результаты; он не удивился и тогда, когда доска начала двигаться вперед, и для того, чтобы поспевать за ней, ему пришлось идти, а затем... бежать. Доска оказалась задней стенкой кареты.

* * *

В начале XVIII века в России не существовало физики; не было никаких пособий по физике и даже научной терминологии. Еще в 1728 году в «Кратком описании комментариев Академии наук» (так назывались труды Академии, издававшиеся на латинском языке) переводчики этих комментариев на русский язык и редакторы перевода не знали, как лучше писать: «фисика», «фусика» или «физика». Издавая в 1746 году сокращенный перевод «Экспериментальной физики» немецкого ученого Вольфа, М. В. Ломоносов предупреждал читателей о том, что он принужден был «искать слова для наименования некоторых физических инструментов, действий и натуральных вещей, которые хотя сперва покажутся несколько странны, однако... со временем через употребление знакомее будут».

В. Л.

ОН ПРОЖИЛ СЧАСТЛИВУЮ ЖИЗНЬ

И. К. Кикоин

В истории физики известны имена выдающихся ученых, которые своими трудами более или менее значительно опередили свой век. Так, например, Ломоносов почти на столетие раньше «срока» сформулировал идею молекулярно-кинетической теории. То же можно сказать и о Циолковском, который примерно на полстолетия опередил эру ракетной техники. Заслуженное признание и слава этих ученых пришли для них слишком поздно. Они сами при жизни не могли участвовать в развитии своих идей. Современные этим ученым наука и техника не были подготовлены для восприятия их идей. И это обстоятельство в некотором смысле было бедой для таких, безусловно великих, ученых: они не были признаны современниками. Истинно счастлив ученый, который идет «в ногу» со временем.

Академик Игорь Васильевич Курчатов был именно счастливым ученым. Он неизменно интуитивно чувствовал развитие современной ему физики. Он всегда занимался наиболее животрепещущими вопросами физики. Так, в середине 20-х годов электрические свойства диэлектриков были одной из актуальных проблем физики. Именно к этому времени относятся работы Курчатова в области электрической прочности диэлектрических кристаллов, которые затем привели его к замечательным исследованиям сегнетоэлектричества. Здесь Курчатову, можно сказать, вдвойне повезло. Его исследования явления сегнетоэлектричества совпали по времени с появлением квантовой теории ферромагнетизма, электрическим аналогом которого и является сегнетоэлект-

Статья впервые опубликована в журнале «Природа», 1974, № 1. Перепечатывается с небольшими изменениями.

Фото *Д. С. Переверзева*

Академик И. В. Курчатов и академик И. Е. Тамм.

ричество (его часто называют ферроэлектричеством). Таким образом, работы Курчатова сразу оказались в русле развития двух актуальных проблем современной ему физики твердого тела: физики диэлектриков и физики магнетизма. В это время Игорь Васильевич энергично «озадачивал» (одно из любимых его выражений) теоретиков из Ленинграда (Я. И. Френкеля) и из Харькова (Л. Д. Ландау), которые занимались теорией магнетизма. Этот цикл работ Курчатова завершается изданием известной монографии «Сегнетоэлектричество», изданной одновременно и во Франции.

С 30-х годов, как известно, началось бурное развитие ядерной физики, которое сопровождалось каскадом крупнейших открытий. Это — открытие нейтрона, позитрона, искусственной радиоактивности и т. д. Курчатов решительно переключает свою лабораторию на работы в этой многообещающей области физики.

В это время в Ленинградском физико-техническом институте (ЛФТИ), где работал Курчатов, практически не было «культуры» физики атомного ядра, кроме небольшой лаборатории Д. В. Скобельцына, который в основном занимался космическими лучами.

Курчатову с его группой приходилось все начинать практически на пустом месте. В это время Игорь Васильевич целыми днями просиживал в библиотеке и изучал литературу. «Литературный» период длился сравнительно недолго. Очень скоро в лаборатории Курчатова начались экспериментальные работы по ядерной физике. Довольно быстро определилось основное направление его интересов: искусственная радиоактивность при облучении нейтронами. Тогда можно было видеть типичную картину: Игорь Васильевич мчится из одного конца коридора в другой с облученным образцом в руке для исследования очередного короткоживущего ядра.

В те времена в стране не было еще ни одного действующего циклотрона и только в Радиевом институте заканчивалось строительство первого циклотрона с вертикально расположенными метровыми полюсами магнита. Этот циклотрон долго не могли наладить. Курчатов немедленно связывается с заведующим физическим отделом Радиевого института Л. В. Мысовским и начинает с ним целую серию физических работ. Мысовский с давних пор занимался исследованием природной радиоактивности. Практически все руководство работами по налаживанию циклотрона взял на себя Игорь Васильевич, и довольно быстро циклотрон был запущен.

Работы в лаборатории Курчатова велись с максимальной интенсивностью. Для химической идентификации искусственных ядер он привлек своего брата Бориса Васильевича Курчатова, и очень скоро были налажены радиохимические исследования с индикаторными (то есть ничтожно малыми) количествами вещества. Словом, в течение полутора лет работы по ядерной физике в лаборатории Курчатова достигли, как принято говорить, мирового уровня.

Вскоре после начала работ вышла монография И. В. Курчатова под названием «Расщепление атомного ядра» (1935 г.). В связи с этим не могу не вспомнить о трагикомическом событии в институте, одним из героев которого был и автор этих строк. В начале 30-х годов мне понадобилось облучать α-частицами алюминиевый порошок, который служил источником позитронов (это было вскоре после открытия супругами Жолио-Кюри искусственной радиоактивности). Для этой цели я использовал ампулу с радоном, которая была закрыта тонким слюдяным окошком. На слюде помещался облучаемый образец. Чтобы избежать опасности утечки радона, ампула хранилась в другой комнате, которая неизменно запиралась. Однажды по какой-то случайности комнату не закрыли, кто-то вошел в нее и, по-видимому случайно, прорвал слюдяное окошко ампулы. Сразу же защелкали счетчики во всех лабораториях института. Поднялась паника. Немедленно были приняты меры: открыты все окна, включена вся наличная вентиляция. Через несколько часов «авария» была ликвидирована и счетчики пришли в норму. На этом можно было бы и успокоиться, если бы не рвение одного из сотрудников, который решил об этом случае доложить директору института Абраму Федоровичу Иоффе. У А. Ф. Иоффе была сильно развита боязнь радиоактивных излучений. Происшествие очень расстроило его, и он назначил комиссию для расследования, выяснения причин и определения последствий. Председателем комиссии был назначен Курчатов. Подсчет показал, что даже если бы долгоживущий продукт распада радона — радий E с периодом распада 29 лет — из всей ампулы осел на поверхностях здания института, то радиоактивность оказалась бы на порядок меньше естественного фона. Комиссия составила соответствующий акт, который и успокоил А. Ф. Иоффе. Однако в течение нескольких месяцев об этом событии не раз вспоминали, и оно было отражено в одном из очередных капустников.

На подаренной мне монографии Игорь Васильевич сделал следующую надпись: «Дорогому Исааку на добрую память. В книге много недостатков. Ты их сам заметишь; укажу только на один, который может от тебя ускользнуть: ничего не написано об ампулах для α-частиц и их коварных свойствах. 20/IV 1935 г. И. В. Курчатов». Видно, это событие надолго врезалось в его память.

Работы по ядерной физике непрерывно велись до самой войны. Правда, начиная с 1937 года я уже не мог за ними следить, потому что уехал в Свердловск и практически не встречался с Игорем Васильевичем. И только в конце 1942 года Курчатов неожиданно появился в Свердловске, зашел ко мне в лабораторию и поинтересовался, чем я занимаюсь. Внешне его посещение тогда ни на чем не сказалось, но позже стало ясно, что он имел поручение прозондировать возможность привлечь меня к новой тематике. Действительно, в начале 1943 года я был вызван в Москву, где встретился с И. В. Курчатовым и А. И. Алихановым у С. В. Кафтанова. Мне сообщили, что имеется поручение правительства заняться вопросами практического использования деления урана. Едва ли нужно упоминать, что после открытия деления урана это был самый животрепещущий вопрос, который интересовал всех физиков. На ядерной конференции 1940 года в Москве проблема деления урана обсуждалась весьма оживленно при активном участии Курчатова. По его инициативе была составлена записка правительству, в которой указывалось на важность этой проблемы и на необходимость организации широких исследований в этой области.

В начале 1943 года организация работ по практическому использованию явления деления урана была оформлена правительственным актом. Началась совместная деятельность с И. В. Курчатовым уже на новом поприще, в новой роли. Понятно, что более актуальной физической проблемы в то время нельзя было себе представить. Конечно, проблема защиты кораблей от магнитных мин, которой занимался тогда Игорь Васильевич, тоже была очень актуальна. Известно, что работы А. П. Александрова и И. В. Курчатова в этой области позволили спасти жизнь многим тысячам моряков. Но проблема урана не терпела никаких отлагательств. Так началась напряженнейшая эпопея решения практической задачи создания атомного оружия. Первое время непосредственно работами занималось считанное число людей. Вскоре Игорь Васильевич привлек крупных теоретиков (Я. Б. Зельдовича, И. Я. Померанчука и др.). Довольно быстро было произведено разделение сфер влияния. Проблемы, не связанные непосредственно с ядерной физикой, были поручены мне: как выразился Курчатов, «ты у нас специалист по пузырькам» (он в шутку называл все работы, не связанные с ядром, пузырьковой физикой). Вопросами ядерной физики занимался он сам и А. И. Алиханов.

Начался бурный организационный период, когда нужно было собирать людей, доставать помещения, оборудование. Временно нам было предоставлено помещение в Пыжевском переулке и в Институте неорганической химии на Калужской улице. И снова Игоря Васильевича можно было видеть бегущим с облученными мишенями из одного конца коридора в другой. Казалось, мы снова в ЛФТИ. Наряду с этой работой Курчатов выполнял огромную организаторскую работу. Засиживались мы на Пыжевском до поздней ночи.

Однажды было сказано, что нужно готовить доклады о программе работ с указанием конечных сроков практического решения проблемы. Мы засели за составление такого доклада — каждый по своей части. И в один из вечеров предстали перед правительством. Докладывали тоже каждый по своей части. В каждом докладе содержался пункт, указывающий сроки получения практических результатов. Как известно, эти сроки были выдержаны.

В это время Игорь Васильевич организовал работы не только по созданию института. Теоретики и экспериментаторы взаимно обучались основам будущей ядерной техники. Коллективно обсуждались основные проблемы, связанные с практической задачей, которая была поставлена. Все, особенно Курчатов, чувствовали огромную ответственность, возложенную на коллектив. Большое беспокойство вызывал вопрос, не обгонит ли нас фашистская Германия. Не было никакой уверенности, что Германия усиленно не занимается проблемой урана. Было ясно, что если в 1941 году все публикации, относящиеся к делению урана, вдруг прекратились, то все, в том числе и

Академик И. В. Курчатов и академик С. П. Королев.

немцы, должны были понимать, что начались работы по использованию этого явления для важных целей. Нужно было принять во внимание и то, что в печати появился ряд статей с оценкой того действия, которое может вызвать цепная ядерная реакция, если она осуществится.

В лаборатории поначалу эксперименты осуществлялись в очень малом масштабе: не было места. Но теоретические и расчетно-оценочные работы велись с чрезвычайной интенсивностью. После наших докладов о перспективах решения проблемы процесс организации лаборатории резко ускорился. Довольно быстро было выделено новое помещение и приведено в порядок старое. К концу 1944 года мы уже имели достаточно приличные помещения для работы.

Организация работ по этой проблеме в нашей стране шла очень интенсивно. Число сотрудников возрастало по экспоненциальному закону:

$$N = N_0 e^{at}$$

(N_0 — начальное число сотрудников, N — число сотрудников в момент времени t).

Научная и организационная деятельность Игоря Васильевича была предельно напряженной. Тогда он руководил работами по измерению основных ядерных констант урана. Необходимо было получить с большой точностью данные о количестве нейтронов, освобождающихся в одном акте деления ядра урана, определить энергетические спектры нейтронов и др.

Как и в прошлом, Курчатов «озадачивает» теоретиков: необходимо развить теорию цепных ядерных реакций. Как известно, наши теоретики с большим успехом справились с этой задачей. Курчатов непосредственно занялся строительством первого атомного реактора. Он целиком был захвачен этим делом и сам руководил проектными, конструкторскими и научными разработками. Он сумел привлечь к проблеме большое количество научных институтов и ученых самых разных специальностей. Его интересовал не только сам реактор. Он понимал, что предстоят большие химические исследования по выделению плутония*). Я помню, однажды, когда мы были в Кремле, Игорь Васильевич демонстрировал первую стеклянную ампулочку с несколькими микрограммами плутония, который был получен на нашем первом реакторе, находящемся в «здании» монтажных мастерских.

Вскоре Курчатов выехал на площадку, где началось сооружение промышленного реактора, и в Москве бывал наездом, как и другие руководители.

Наконец, наступил день, когда все было готово для испытания атомного оружия. Непосредственное руководство первым взрывом осуществлял Курчатов. И несмотря на то, что на месте испытания присутствовали ответственные члены правительства, было сказано, что руководство всеми работами поручается Курчатову. И все работы были подчинены лично ему. Доверие правительства Игорю Васильевичу было неограниченным.

Игорь Васильевич быстро понял, что актуальнейшая проблема послевоенного времени — мирное использование атома в энергетике. И поэтому не удивительно, что первая атомная электростанция была создана под его непосредственным руководством. Курчатов понимал также, что для дальнейшего развития атомной науки требуется обеспечить ее тылы, создать современные установки для изучения физики элементарных частиц. И по его инициативе, также весьма своевременно, началась организация Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ) под Москвою в Дубне. Можно сказать, что Дубна — это детище Курчатова, хотя физика элементарных частиц была далека от личных научных интересов ученого.

Едва ли нужно доказывать, насколько своевременно были начаты работы по управляемым термоядерным реакциям. Тогда еще не было известно, что в других странах тоже ведутся такие работы. Это было начало 1952 года. Курчатов внимательно следил за ходом работ, хотя первое время непосредственного участия в них сам не принимал. Не менее своевременно он оценил полученные при исследованиях результаты и понял, что первоначальные надежды на быстрое решение проблемы оказались слишком оптимистичными. Он понял, что необходима серьезная систематическая работа в этой области, и опять же своевременно оценил целесообразность рассекречивания этих работ. Как известно, в 1956 году он в своем докладе в Англии изложил наши результаты по управляемому термоядерному синтезу.

Помню, с какой тщательностью Курчатов готовил свой доклад: оттачивал каждую фразу, обсуждал, исправлял, переделывал. Доклад в Англии произвел сенсацию. Только после этого стало известно, что аналогичные работы велись и в США, и в Англии. С тех пор начался период широкого международного сотрудничества в достижении управляемой термоядерной реакции. Личные интересы Курчатова также переместились в эту увлекательную область. В последние годы он сам руководил работами по термоядерному синтезу. Он привлек к ним многие научные учреждения, конструкторские организации. Причем, он решил придать исследованиям отчетливую целенаправленность и даже настаивал, чтобы началось проектирование будущей термоядерной электростанции.

С самого начала организации Института атомной энергии (ИАЭ) Игоря Васильевича беспокоил вопрос, сумеем ли мы наладить работу так, как она была организована А. Ф. Иоф-

*) Плутоний — трансурановый элемент, занимающий 94-ю клетку периодической системы Менделеева. Пригоден для создания атомного оружия и мирного использования атомной энергии.

фе в ЛФТИ, где в основе лежал беспредельный энтузиазм сотрудников. Все мы чувствовали себя ответственными перед Иоффе, авторитет которого был чрезвычайно высок. Это Курчатов понимал и хотел обеспечить такую же интенсивную работу у себя в институте. Он не раз высказывался в том духе, что нам придется надеяться не на личное обаяние руководителей, а на важность и грандиозность решаемой проблемы. В действительности его личный авторитет был велик. Что касается обаяния, то ему тоже было его не занимать. Он сам в этом не был убежден, но когда ему на это указывали, ухмылялся и говорил: «Посмотрим». Опыт показал, что и личное обаяние Курчатова, и его большой научный авторитет, наряду с грандиозностью проблемы, которая была поручена институту, действительно, обеспечили высокую интенсивность и производительность научного труда. Сотрудники ИАЭ тоже работали, не считаясь со временем, не за страх, а за совесть.

Термоядерный синтез — это лебединая песня Курчатова. Последние дни он проводил непосредственно в лаборатории, за пультом, за рабочим столом, на термоядерных установках нашего института и был полон надежд, что в самое ближайшее время термоядерный синтез будет практически осуществлен.

Можно утверждать, что Курчатов прожил счастливую жизнь. Игорь Васильевич занимался самыми актуальными, самыми животрепещущими, самыми многообещающими вопросами науки. Он верил в беспредельную мощь науки и заразил этой верой своих сотрудников. На этом и сейчас зиждутся успехи атомной науки в нашей стране.

Биосфера и ЭМП

Изобретатель радио А. С. Попов когда-то говорил, что человеческий организм не имеет еще такого органа чувств, который замечал бы электромагнитные волны. Это высказывание расшифровывалось как вывод об отсутствии биологического действия радиоволн. Сегодня такой вывод имеет лишь исторический интерес.

Биосфера — область распространения жизни на земном шаре — подвержена влиянию различных ЭМП (электромагнитных полей), источниками которых служат Земля, Солнце и космическое пространство. Все живое на Земле растет и развивается в геомагнитном поле, величина которого в среднем равна около $0{,}5\cdot10^{-4}$ *тл*.

Этот факт до недавнего времени считался несущественным. Однако начавшаяся эра космических исследований поставила на повестку дня вопрос о детальной оценке условий жизни на Земле. Выяснилось, что снижение геомагнитного поля до уровня магнитного поля Луны,

(окончание см. с. 63)

Правдоподобные рассуждения и математика

Д. С. Людмилов, С. Д. Людмилова

«Написав, что нечто очевидно, вы, наверное, так и думали. Но когда, спустя месяц, или два, или шесть, вы вынули рукопись и перечитали ее заново, вы по-прежнему продолжаете так считать? ...
Когда вы объясняли это другу или на семинаре, было ли это место воспринято как очевидное? Или кто-нибудь задавал вопросы и усаживался, ворча, после ваших уговоров? Вы его убедили или запугали? Ответы на эти риторические вопросы ограничивают использование слова «очевидно». Есть еще и другое правило, главное, его знает каждый; нарушение этого правила — самый частый источник математических ошибок: удостоверьтесь в том, что «очевидное» — верно.»

П. Р. Халмош. Как писать математические тексты.

Правдоподобные рассуждения, подсказываемые интуицией, играют значительную роль в математических исследованиях, в поиске решения задачи. Математику было бы труднее находить решение новых математических проблем, если бы он не получал «подсказок» от своей математической интуиции.

То же самое можно сказать об ученике, который ищет способ решения задачи. Поиск решения — это формулировка различных гипотез и последовательная их математическая проверка.

Но... будьте осторожны! Нельзя недооценивать математическую строгость и переоценивать интуицию. То, что интуитивно очевидно, не всегда соответствует действительности.

Переправа

Рассмотрим один поучительный пример, который объясняет, почему математики стремятся строго доказывать «очевидное».

В книге П. Ю. Германовича «Сборник задач по математике на сообразительность» (М., Учпедгиз, 1960) есть такая задача.

Канал шириной 3,5 м имеет поворот (рис. 1). Как организовать переправу через него, если имеются две

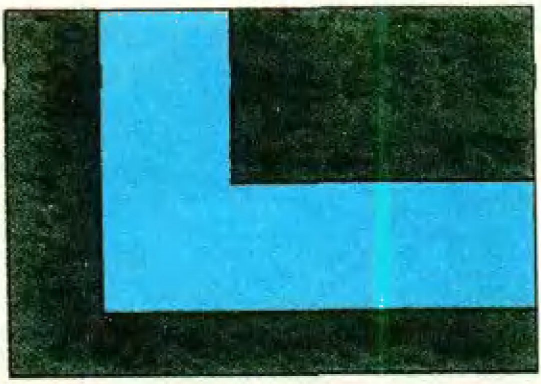


Рис. 1.

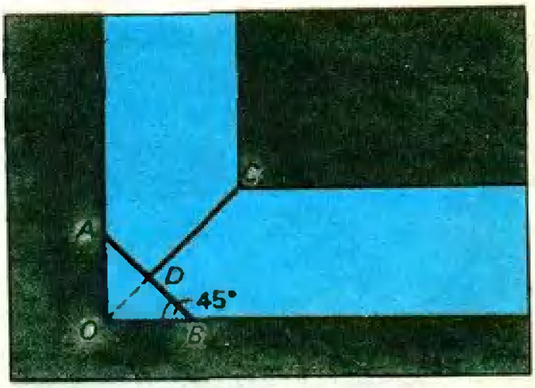


Рис. 2.

доски, но длина каждой из досок только 3 м?

Авторское решение задачи показано на рисунке 2. Судя по этому рисунку, автор предполагает, что

(1) *края A и B первой доски должны упираться в края рва* (мы считаем, что доски не изгибаются);

(2) *первая доска AB должна образовывать с краями рва углы* 45°;

(3) *вторая доска CD должна быть перпендикулярной AB* (точка C — вершина противоположного угла рва).

(4) *такое расположение досок указанных размеров возможно* (и, следовательно, обеспечивает переправу).

Все эти гипотезы интуитивно правдоподобны, не так ли? Но... давайте займемся проверкой.

Первый сюрприз

Начнем с гипотезы 4. Вероятно, очень легко поверить в ее справедливость: неужели за счет лишних 2,5 м (6 м — —3,5 м) доски нельзя указанным на рисунке 2 способом получить недостающие 0,5 м (3,5 м — 3 м)?

Однако проведем расчеты. Из рисунка 2 имеем:

$$OC = 3{,}5\sqrt{2}\ м, \quad OD = \frac{1}{2}AB = 1{,}5\ м,$$

$$CD = OC - OD = (3{,}5\sqrt{2} - 1{,}5)\ м.$$

Переправа возможна, если выполняется неравенство

$$3{,}5\sqrt{2} - 1{,}5 \leqslant 3$$

или $3{,}5\sqrt{2} \leqslant 4{,}5$, откуда $7\sqrt{2} \leqslant 9$, а это неверно. Поэтому в действительности $CD > 3$ м!

Следует ли отсюда, что переправиться невозможно? Пока что нет, ведь этот вывод получен из предположения, что первые три гипотезы выполняются. Быть может, существует другое расположение досок, обеспечивающее переправу?

Второй сюрприз

Из рисунка 3 видно, что гипотеза 1 верна: действительно, если один из концов A первой доски (или оба ее конца) не лежит на самом краю рва, то эту доску удается передвинуть в более выгодное положение.

Нетрудно подтвердить и гипотезу 3: если вторая доска CD не будет перпендикулярна AB (см. рис. 4), то она должна будет иметь большую длину.

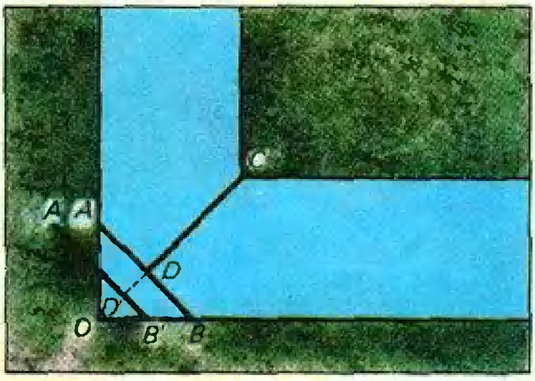


Рис. 3.

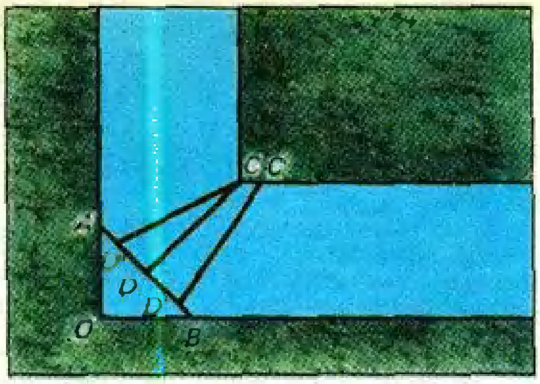


Рис. 4.

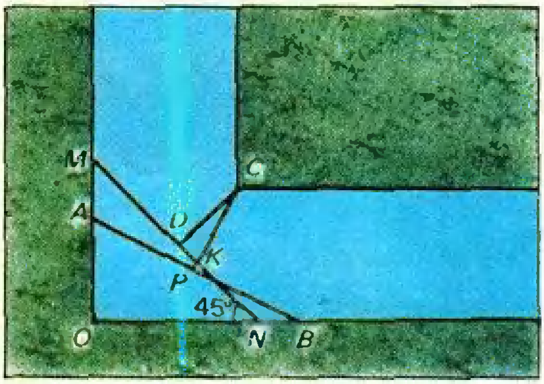


Рис. 5.

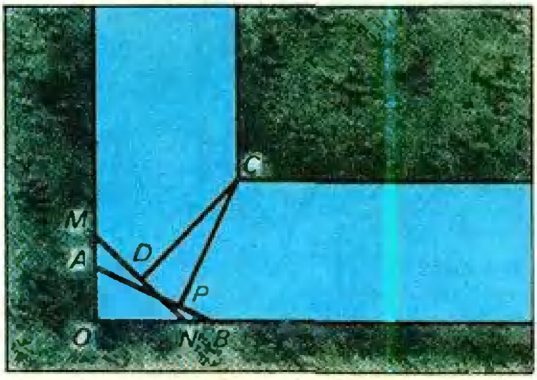


Рис. 6.

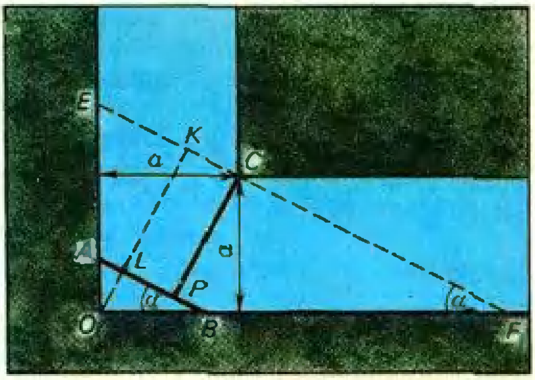


Рис. 7.

Остается проверить гипотезу 2. На первый взгляд кажется, что и эта гипотеза подтверждается. Действительно, рассмотрим два положения первой доски (рис. 5): MN ($\angle MNO = 45°$) и AB ($\angle ABO \neq 45°$). Пусть $CD \perp MN$, $CP \perp AB$, K — точка пересечения CP и MN. Ясно, что $CP > CD$, так как $CP > CK$ и $CK > CD$ (гипотенуза больше катета). Однако отрезки MN и CP могут и не пересекаться, соответствующее расположение досок указано на рисунке 6. Обратите *внимание, что на* этом рисунке $CD \geqslant CP$. Предыдущее рассуждение не проходит. По-видимому, непосредственно геометрически проверить гипотезу 2 нелегко.

Попытаемся сделать это алгебраически. Обозначим ширину канала через a, длину каждой доски — через l ($a > l$), $\angle ABO$ через α (рис. 7) и будем считать величины a и l постоянными, а величину α переменной. Гипотеза 2 утверждает, что минимум длины отрезка CP ($CP \perp AB$) достигается при $\alpha = 45°$. Поэтому надо выразить $y = CP$ как функцию от α.

Проведем $ECF \parallel AB$ и $OLK \perp AB$ (рис. 7). Тогда

$$EF = EC + CF = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{a}{\sin\alpha}; \quad OF = EF\cos\alpha = a + \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad OK = OF\sin\alpha = a\sin\alpha + a\cos\alpha; \quad OB = AB\cos\alpha = l\cos\alpha; \quad OL = OB\sin\alpha = l\cos\alpha\sin\alpha; \quad y = LK = CP = OK - OL = a\sin\alpha + a\cos\alpha - l\sin\alpha\cos\alpha.$$

Исследуем функцию $y(\alpha)$ на максимум и минимум. Пусть

$$x = \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(45° + \alpha).$$

Тогда $x^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$,

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{x^2 - 1}{2},$$

$$y(x) = ax - \frac{l(x^2 - 1)}{2} = \frac{-lx^2}{2} + ax + \frac{l}{2}.$$

Если бы область определения функции $y(x)$ не была ограничена, то она не имела бы минимума, а имела бы максимум при $x = \frac{a}{l}$ (рис. 8).

Этот максимум равен

$$\frac{1}{2}\left(-l\frac{a^2}{l^2} + 2a\frac{a}{l} + l\right) = \frac{a^2 + l^2}{2l}.$$

Однако область определения функции $y(x)$ ограничена, так как $x = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45°)$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

Функция $x(\alpha)$ имеет минимум $x = 1$ при $\alpha = 0°$ (этот минимум достигается, когда $\alpha = 0°$ — доска AB вся лежит на одном берегу) и максимум $x = \sqrt{2}$ при $\alpha = 45°$. Отсюда находим область определения функции $y = f(x)$: $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ *).

*) На самом деле, при α, близком к 0° (90°) и AB, меньшем a, точка P на рисунке 7 окажется на продолжении AB, то есть на берегу и потребуется доска длины, меньшей чем CP, но если конец P доски CP лежит на берегу, то CP — наименьшее при $\alpha = 0°$ и совпадает с $y(x)$ при $x = 1$.

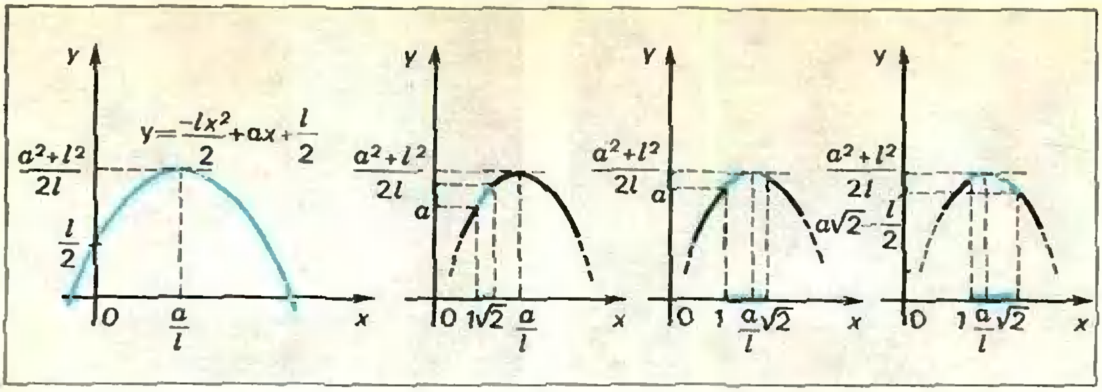


Рис. 8. Рис. 9. Рис. 10. Рис. 11.

Точка $x=1$ на оси абсцисс расположена всегда между точками $x=0$ и $x=\frac{a}{l}$ $(a>l)$. Точка же $x=\sqrt{2}$ может занимать два положения: слева от точки $x=\frac{a}{l}$ (рис. 9) или справа от этой точки (рис. 10).

В том и в другом случае графиком функции $f(x)$ является дуга AB параболы между точками $x=1$ и $x=\sqrt{2}$.

В первом случае $\left(\frac{a}{l}\geqslant\sqrt{2}\right)$ функция $y(x)$ при $x=\sqrt{2}$ $(\alpha=45^\circ)$ достигает максимума (!), равного $a\sqrt{2}-\frac{l}{2}$, а при $x=1$ — минимума, равного a (рис. 9; переправа в этом случае невозможна, так как при любом $1<x\leqslant\sqrt{2}$ будет $y>a$).

Мы получили результат, прямо противоположный интуитивно предполагаемому! Рисунок 6 не напрасно настораживал нас. Если $\frac{a}{l}\geqslant\sqrt{2}$, то при $\alpha=45^\circ$ расстояние CP от точки C до первой доски будет не наименьшим, а наибольшим! Согласитесь, что интуиция, подсказавшая гипотезу 2, очень даже красиво обманула нас. Кроме того, невозможность переправы при $l\leqslant\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (например, при $a=3,5$ м, $l\approx2,4$ м) трудно предсказать интуитивно, хотя ясно, что какое-то ограничение на l должно быть, при очень малом l переправа невозможна.

Продолжим исследования

Посмотрим, всегда ли возможна переправа, если $1<\frac{a}{l}<\sqrt{2}$. В этом случае функция $y(x)$ имеет максимум, равный $\frac{a^2+l^2}{2l}$ (рис. 10). Нас интересует минимум этой функции. Функция достигает минимума при $x=1$ или при $x=\sqrt{2}$. Пусть $y(1)\leqslant y(\sqrt{2})$ (рис. 10). Поскольку $y(1)=a$, $y(\sqrt{2})=a\sqrt{2}-\frac{l}{2}$, то $a\sqrt{2}-\frac{l}{2}\geqslant a$, откуда $\frac{a}{l}\geqslant\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Итак, при $\frac{\sqrt{2}+1}{2}\leqslant\frac{a}{l}<\sqrt{2}$ переправа неосуществима, так как при $1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$ будет $y(x)>a$ (рис. 9). Остается рассмотреть случай $1<\frac{a}{l}<\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

В этом случае $y(\sqrt{2})=a\sqrt{2}-\frac{l}{2}<a=y(1)$, минимум функции $y(x)$ равен $a\sqrt{2}-\frac{l}{2}$ (рис. 11) и достигается при $x=\sqrt{2}$, $\alpha=45^\circ$. Переправа возможна, если этот минимум не превосходит длины l второй доски, то есть при $a\sqrt{2}-\frac{l}{2}\leqslant l$, или $\frac{a}{l}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(<\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$.

Подытоживая, получаем, что переправа невозможна при $\frac{a}{l}>\frac{3\sqrt{2}}{4}$

и возможна при

$$\frac{a}{l} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}. \qquad (*)$$

Отношение $\frac{a}{l} = \frac{3,5}{3}$ условию $(*)$ не удовлетворяет, так как $\frac{3,5}{3} > \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Из неравенства $\frac{3,5}{l} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}$ находим, что переправа возможна, если $l \geqslant \frac{7\sqrt{2}}{3} \approx 3,3$ *м*.

Невозможность переправы геометрически означает, что множества точек, «заметаемые» первой и второй доской, не пересекаются (рис. 12). Если $\frac{a}{l} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, то эти множества имеют лишь одну общую точку.

Если $\frac{a}{l} < \frac{3\sqrt{2}}{4}$, то область пересечения указанных множеств содержит бесчисленное множество точек.

Если $\frac{a}{l}$ ближе к 1, чем к $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (область пересечения множеств достаточна велика), первую доску можно располагать и не под углом 45° к берегам, а вторую доску — не перпендикулярно к первой, можно даже отодвинуть ее конец от вершины угла (точки C).

Итоги

Какой же вывод можно сделать из всего сказанного? Подтверждают ли все наши рассуждения тот факт, что интуитивное предсказание гипотезы 2 является верным?

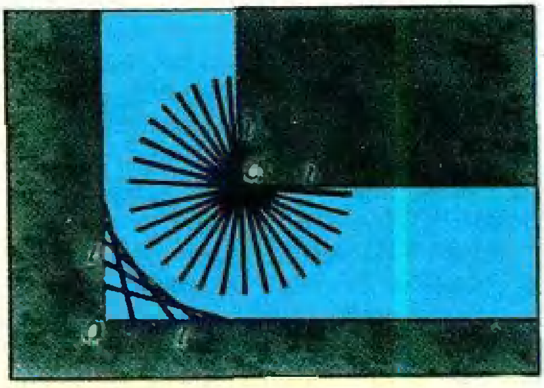


Рис. 12.

Мы видели, что гипотеза 2 в формулировке

а) *первая доска окажется на наименьшем расстоянии от C, если $\alpha = 45°$*,

не соответствует действительности. В формулировке же

б) *если переправа возможна* $\left(\frac{a}{l} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, *то первая доска окажется на наименьшем расстоянии от C, если $\alpha = 45°$*,

гипотеза 2 соответствует действительности. Однако предсказать этот результат интуитивно трудно.

В связи с рассмотренной задачей возникают новые интересные задачи. Вот некоторые из них.

Упражнения

1. При какой минимальной длине двух одинаковых досок (ширина канала равна 3,5 *м*) переправа возможна, если запас покрытия для каждой доски должен составлять 20 *см* (по 10 *см* для каждого конца)?

2. Вывести условие возможности переправы через канал ширины a с помощью двух досок различной длины: m и n ($m < a$, $n < a$). В частности, выяснить, возможна ли переправа, если $a = 3,5$ *м* и $m + n = 6$ *м*.

3*. Через канал пытаются переправиться с помощью трех досок. При каких длинах a, b, c досок это возможно? Хватит ли трех досок по 3 *м* каждая?*)

4*. Две ветви канала имеют различную ширину: a (*м*) и b (*м*) ($a > b$), причем имеются две доски одинаковой или различной длины: m и n, — каждая из которых меньше b. Вывести необходимое и достаточное условие возможности переправы.

5*. Ветви канала образуют произвольный (а не прямой) угол φ, их ширина равна a и b, доски — различной длины (m и n). При каком условии возможна переправа?

Литература

1. Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, ИЛ, 1957.

2. Д. Пойа, Математическое открытие, М., «Наука», 1970.

3. Д. Пойа, Как решать задачу, М., Учпедгиз, 1957.

4. Г. Д. Балк, М. Б. Балк, Испытания на правдоподобие. «Квант», 1972, № 1.

---

*) Задачи 3—5 решать не обязательно, их решения очень трудные, громоздкие, требуют знаний, выходящих за пределы школьной программы.

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 июля 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М256, М257» или «...Ф268». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «..., новая задача по математике»).

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные из них отмечены звездочкой.

Задачи

М261—М265; Ф273—Ф277

М261. Обруч радиуса R, висевший на неподвижном круге радиуса $r < R$, начинают катить по этому кругу. Докажите, что точка обруча описывает ту же траекторию, которую описывала бы точка колеса радиуса $R-r$, катящегося снаружи по тому же кругу радиуса r (рис. 1, *а*, *б*). (Качение происходит без скольжения — так, что длины прокатившихся друг по другу дуг равны.)

С. Г. Гиндикин

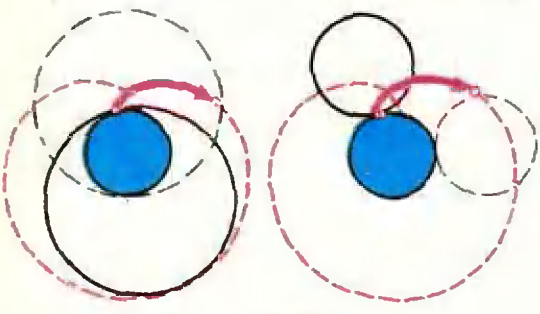


Рис. 1.

М262. Какое наибольшее число:
а) ладей,
б) ферзей
можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы каждая из этих фигур была под ударом не более чем одной из остальных?

В. и Л. Рабинович

М263. Даны два числа p и q, большие 1. На сторонах BC и DC прямоугольника $ABCD$ берутся точки P и Q так, что $|BC| = p \cdot |BP|$ и $|DC| = q \cdot |DQ|$. При каком отношении длин сторон AB и AD угол PAQ будет иметь наибольшую величину? Какова эта наибольшая величина в частном случае $p = 2$, $q = \frac{3}{2}$ (рис. 2)?

Э. Г. Готман

М264. В городе одна синяя площадь и n зеленых, причем каждая зеленая площадь соединена улицами с синей и с двумя зелеными (рис. 3). На каждой из $2n$ улиц ввели одностороннее движение так, что на каждую

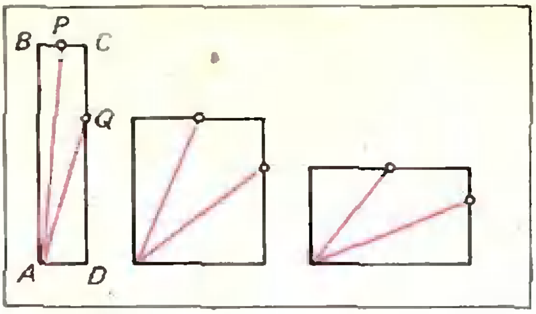
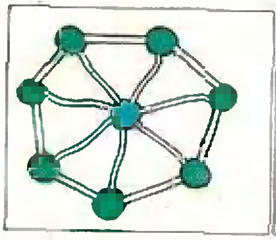


Рис. 2.

площадь можно приехать и с каждой — уехать. Докажите, что с любой площади этого города можно, не нарушая введенных правил, доехать до любой из остальных.

(Для города, план которого изображен на рисунке 4, аналогичное утверждение было бы неверным.)

Б. Розенштейн, ученик 9 класса



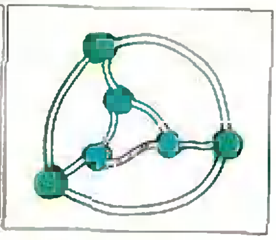


Рис. 3. Рис. 4.

М265. Диагональ d прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами a, b и c углы α, β и γ. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma$ меньше π.

М. Л. Герзер

Ф273. Для получения газов при сверхвысоких температурах и давлениях иногда применяется установка, состоящая из закрытого с одного конца цилиндра-ствола и поршня-пули, влетающей в цилиндр с открытой стороны. При хорошей обработке ствола и пули удается добиться малой утечки газа через зазор. Благодаря очень высоким температурам сильно сжатые газы в этих условиях еще можно считать идеальными. Оценить верхний предел температуры аргона, подвергнутого сжатию в такой установке, если пуля массы $m = 100$ *г* влетает в ствол, имеющий объем $V_0 = 200$ *см*^{3}, с начальной скоростью $v = 250$ *м/с*. Начальные температура и давление газа равны соответственно $T_0 = 300°$ К и $p_0 = 1$ *атм*.

Ф274. Решите задачу Ф232 или прочтите ее решение в этом номере журнала. Какое количество тепла выделится на сопротивлении R после замыкания ключа K, если вольт-амперная характеристика диода будет такой, как показано на рисунке 5?

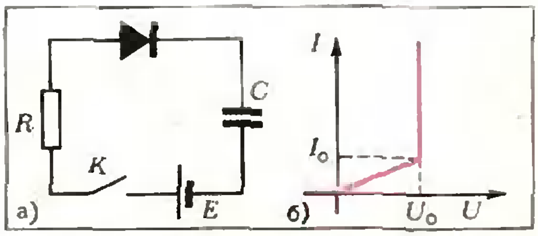


Рис. 5.

Ф275. На обод массивного колеса массы M надет дополнительный груз малого размера и массы m, причем $M : m = 15$. С какой скоростью должно катиться колесо, чтобы оно подпрыгивало?

Ф276. Какие очки следует прописать человеку, если в воде он видит нормально?

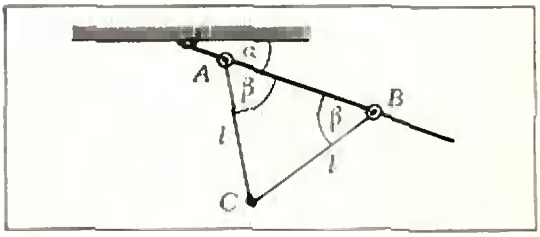


Рис. 6.

Ф277. Определить период колебаний грузика C, шарнирно прикрепленного двумя очень легкими стержнями длины l к стержню AB, укрепленному под углом α к горизонту (рис. 6). $\angle BAC = \angle ABC = \beta$. Трением пренебречь.

Решения задач

М219—М221; Ф228—Ф232

М219. *В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами?*

Сначала решим аналогичную плоскую задачу. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько существует параллелограммов, для которых эти точки служат вершинами?

Эта задача значительно проще пространственной. О т в е т в ней: 3 параллелограмма. Убедиться в этом можно, например, так. Предположим, что параллелограмм имеет три данные точки вершинами. Тогда одна из них (C на рис. 1) играет особую роль: она соединена с двумя другими точками сторонами параллелограмма (а те две между собой — диагональю). Ясно, что такой точкой C можно «назначить» любую из трех данных точек, после чего параллелограмм строится единственным образом (рис. 2).

Перейдем теперь к пространственной задаче. Самое замечательное в ней — о т в е т: 29 параллелепипедов.

1-е р е ш е н и е. Сначала, как полагается в задачах «на построение», проведем небольшой анализ, то есть представим себе, что параллелепипед (имеющий четыре данные точки вершинами) построен.

Из восьми вершин параллелепипеда четыре вершины, не лежащие в одной грани, можно выделить четырьмя существенно различными способами *), как показано на рисунках 3, *а*, *б*, *в*, *г*. Чтобы отличить эти способы, достаточно, например, посмотреть, сколько в каждом случае имеется граней, содержащих три выделенных вершины, — такие грани мы будем называть жесткими (они сразу строятся по трем своим вершинам): в случае *а* три жесткие грани, *б* — две, *в* — одна, *г* — ни одной. Более трех жестких граней быть не может: две жесткие грани не могут быть параллельны, поскольку каждая содержит три данные точки, а всего точек — четыре.

Теперь для каждого случая отдельно посчитаем, сколько параллелепипедов такого типа можно построить по данным четырем точкам.

а) Три жесткие грани должны иметь общую вершину A. После того как на роль этой общей вершины A выбрана одна из четырех точек, параллелепипед строится однозначно. Итак, в этом случае можно построить 4 параллелепипеда.

б) Две жесткие грани должны иметь общее ребро. На роли концов этого ребра $B'B''$ можно выбрать любые две точки из четырех (6 способов); после этого одну из двух оставшихся точек нужно соединить с B' (2 способа). Тем самым судьба оставшейся четвертой точки будет решена — она будет

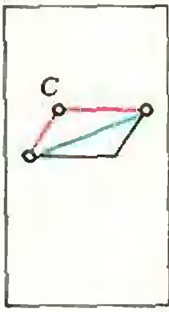


Рис. 1.

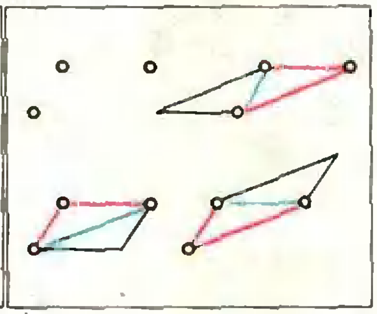


Рис. 2.

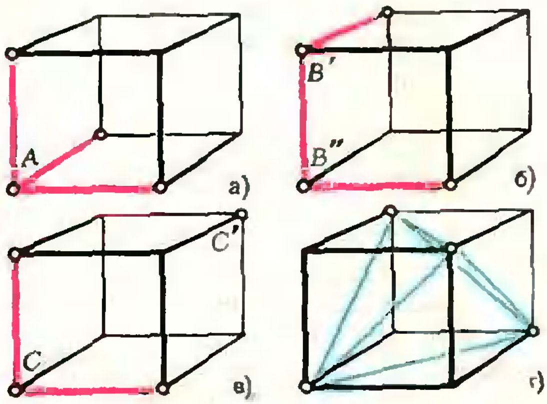


Рис. 3.

*) Словам «существенно различными» можно придать такой точный смысл: два 4-подмножества вершин считаются существенно различными, если нельзя отобразить множество из восьми вершин на себя так, чтобы вершины одной грани перешли в вершины одной грани, а подмножество из четырех вершин — одно в другое. На этом языке можно было продолжить решение, но мы выбрали более наглядный способ изложения.

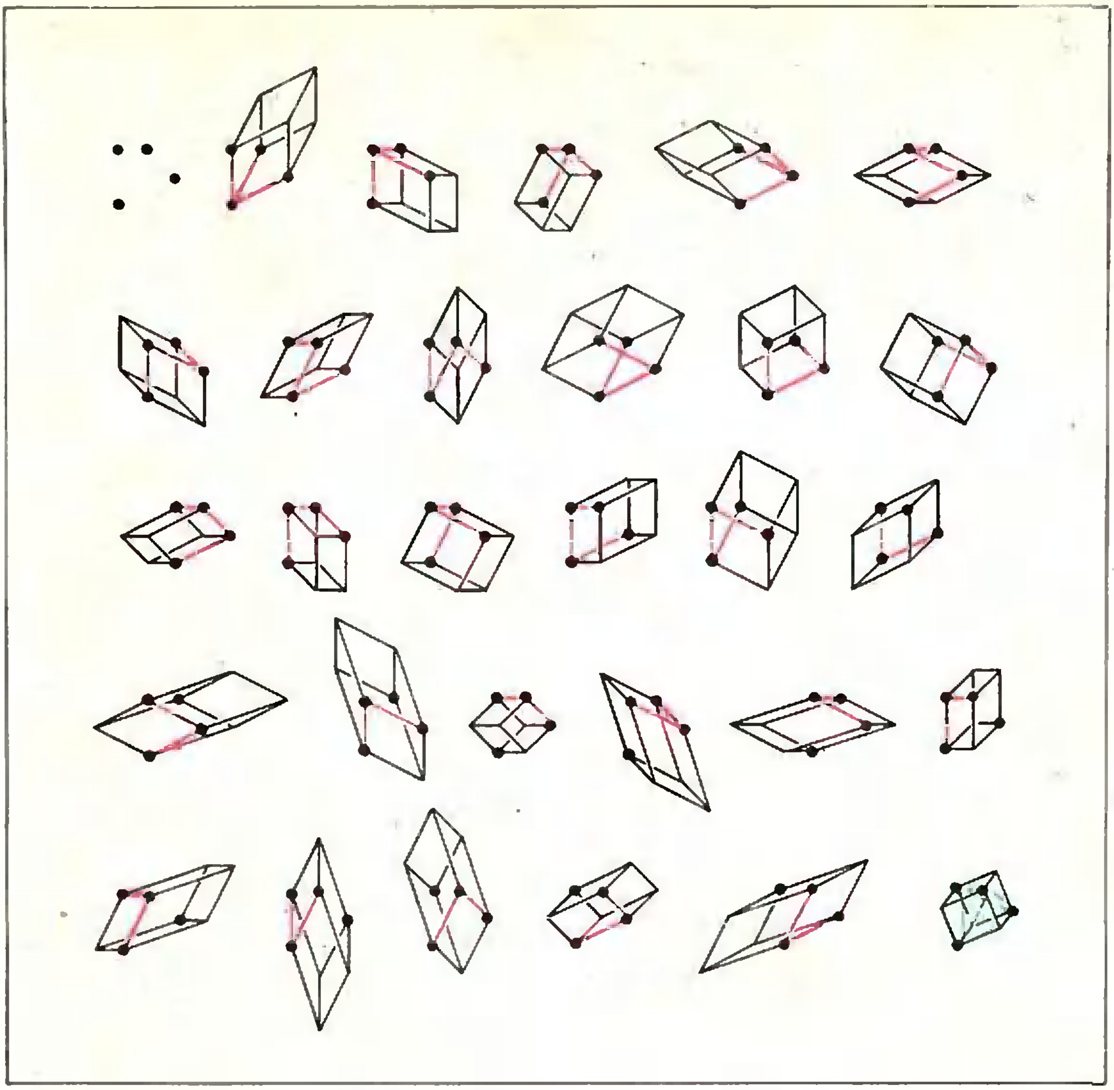


Рис. 4.

соединена с точкой B'' — и обе жесткие грани, а тем самым, и параллелепипед будут определены однозначно. Всего в этом случае можно построить 12 параллелепипедов.

в) Здесь — одна жесткая грань, содержащая три из четырех точек, а четвертая *точка C' должна быть, очевидно, противоположной* вершиной параллелепипеда по отношению к точке C — «главной» вершине жесткой грани. На роль C можно назначить любую из четырех точек, на роль C' — любую из трех остальных. После этого жесткая грань, а затем и весь параллелепипед строятся однозначно. Итак, получим еще 12 параллелепипедов.

г) Жестких граней нет, и поэтому, как нетрудно доказать, в каждой грани должны быть две выделенные точки, не лежащие на одном ребре. Три возможных разбиения множества из четырех точек на два подмножества по две точки в каждом позволяют построить три пары скрещивающихся прямых (диагоналей противоположных граней параллелепипеда), а значит, и три пары параллельных друг другу плоскостей, при пересечении которых получается нужный параллелепипед. Здесь он только один (это неудивительно, *поскольку роли всех точек совершенно одинаковы*).

Складывая, получаем ответ: $4+12+$ $+12+1=29$. На рисунке 4 воспроизведены все 29 штук.

Приведем теперь второе решение задачи (где тот же ответ получается совсем иначе, что уже гарантирует от ошибки), но раньше вернемся на минуту к плоской задаче.

Ответ «3» можно обосновать еще так. Заметим, что «средние линии» будущего параллелограмма (прямые, параллельные сторонам и расположенные посередине между ними) — это прямые, равноудаленные от всех трех данных точек. Имея две такие «средние»

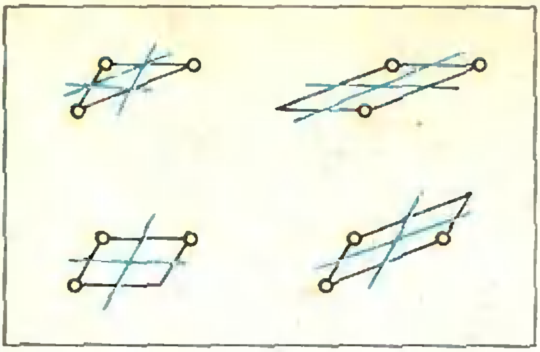


Рис. 5.

прямые, легко построить параллелограмм — достаточно провести параллельные им прямые через данные точки. Всего прямых, равноудаленных от трех данных точек, существует три (они идут по средним линиям треугольника с вершинами в данных точках). Выбрать две из них можно тремя способами (рис. 5).

2-е решение. Три «средние плоскости» искомого параллелепипеда (плоскости, равноудаленные от всех восьми его вершин) должны удовлетворять следующим условиям:

1° каждая из них равноудалена от данных четырех точек;

2° все три плоскости пересекаются в одной точке.

Обратно, если удастся указать тройку плоскостей, удовлетворяющих условиям 1° и 2°, то параллелепипед, в котором они служат «средними», определяется однозначно: достаточно через четыре данные точки провести все различные плоскости, параллельные каждой плоскости из этой тройки, — и параллелепипед готов.

Сначала выясним: сколько существует плоскостей p, равноудаленных от четырех данных точек K, L, M, N (не лежащих в одной плоскости)? Докажем, что семь. Действительно, достаточно указать, какие точки лежат по одну сторону p, а какие — по другую. Возможно, что по одну сторону будет три точки, а по другую — одна (четыре плоскости), а, возможно, что по обе стороны будет по две точки (три плоскости).

Легко видеть, как строить все эти семь плоскостей: все они пересекают ребра тетраэдра $KLMN$ в серединах, а его грани — по средним линиям (четыре плоскости пересекают тетраэдр по треугольнику, а три — по параллелограмму, рис. 6).

Три плоскости из семи мы можем выбрать $C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$ способами. Каждая из этих троек удовлетворяет условию 1°; остается выяснить, сколько из этих троек «плохих», не удовлетворяющих условию 2°, то есть параллельных одной прямой.

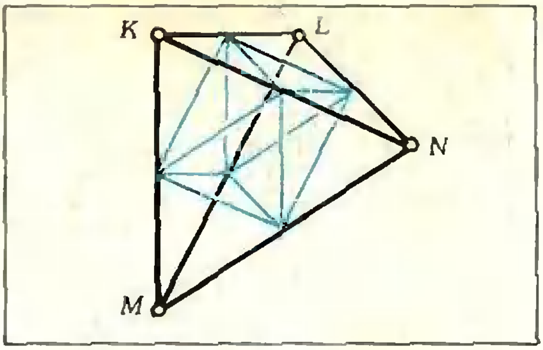


Рис. 6.

Пользуясь тем, что линия пересечения каждых двух из семи плоскостей либо соединяет середины двух противоположных ребер тетраэдра $KLMN$ (таких случаев всего три — пересечение двух плоскостей), либо параллельна одному из ребер этого тетраэдра (причем каждому ребру параллельны три из семи плоскостей), — получим, что «плохих» троек столько же, сколько ребер у тетраэдра — шесть.

Вычитая, получаем ответ: $35 - 6 = 29$.

Н. Б. Васильев

М220. *Король обошел шахматную доску* 8×8, *побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. (Король ходит по обычным правилам: за один ход он может перейти по горизонтали, вертикали или диагонали на любое соседнее поле.) Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наименьшую и какую наибольшую длину может она иметь? (Сторона клетки равна единице).*

Король сделал 64 хода. Поскольку длина каждого хода равна либо единице, либо $\sqrt{2}$, то длина всего пути заведомо не меньше 64. (Путь длины 64 действительно существует — см. пример на рисунке 7.) Покажем теперь, что длина пути короля не может быть больше $28 + 36\sqrt{2}$. Для этого достаточно показать, что путь короля содержит не меньше 28 «прямых» ходов. Рассмотрим два соседних выхода короля на границу поля. Легко сообразить, что эти граничные поля должны быть соседними, иначе путь короля окажется самопересекающимся (см. рис. 8; постарайтесь строго доказать это утверждение). Так как цвет этих полей различен, а при ходах по диагонали цвет не меняется, то между двумя соседними выходами на границу должен быть «прямой» ход. Поскольку граничных полей 28, то и выходов на границу — тоже 28, и, следовательно, прямолинейных ходов действительно не меньше 28. Из примера пути короля, приведенного на

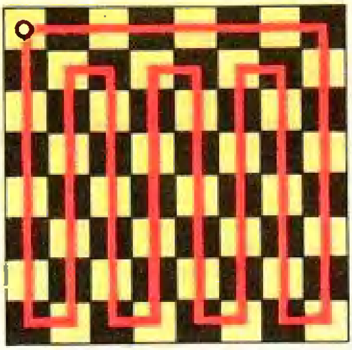


Рис. 7.

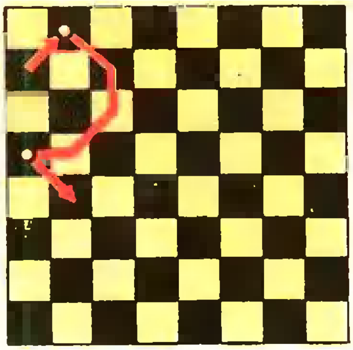


Рис. 8.

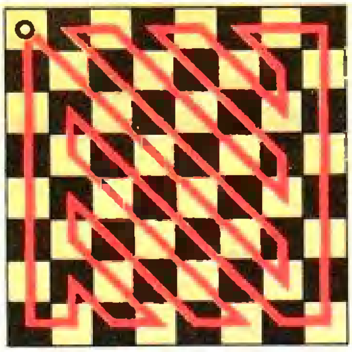


Рис. 9.

рисунке 9, следует, что можно обойтись ровно 28 «прямыми» ходами.

М221. *На бумагу поставили кляксу. Для каждой точки кляксы определили наименьшее расстояние от границы кляксы, а также наибольшее расстояние от границы кляксы. Среди всех наименьших расстояний выбрали наибольшее — r_0, а среди наибольших выбрали наименьшее — R_0. Какую форму имеет клякса, если $r_0 = R_0$?*

Пусть A — точка кляксы, наименьшее расстояние от которой до границы кляксы равно r_0. Тогда круг радиуса r_0 с центром в точке A содержится внутри кляксы (если бы этот круг не содержался полностью внутри кляксы, то какая-то точка границы кляксы оказалась бы внутри круга, и расстояние до нее от точки A было бы меньше r_0, что противоречит выбору r_0,— см. рис. 10).

Аналогично, если B — точка кляксы, наибольшее расстояние от которой до границы кляксы равно R_0, то вся клякса содержится в круге радиуса R_0 с центром в точке B (рис. 10).

Итак, первый построенный круг содержится в кляксе, а клякса в свою очередь содержится во втором круге. Но по условию

$$r_0 = R_0 = \rho,$$

откуда следует, что круги совпадают; значит, совпадают и точки A и B, а клякса имеет форму круга с центром в точке A ($=B$) радиуса ρ.

Г. А. Гальперин

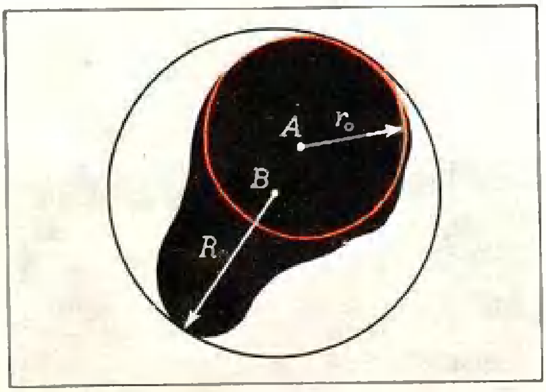


Рис. 10.

Ф228. *На конце доски длины L и массы M находится короткий брусок массы m (рис. 11). Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности доски равен μ. Какую скорость v_0 нужно толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под бруска?*

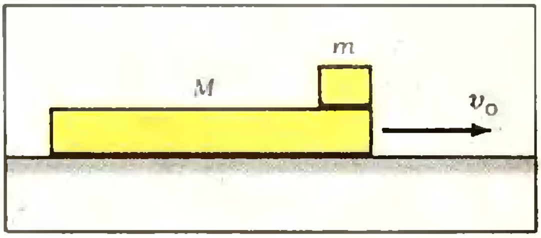


Рис. 11.

Так как доске скорость сообщается толчком, то в начальный момент брусок покоится относительно плоскости, а доска имеет скорость v_0. В горизонтальном направлении на брусок и доску действуют только силы трения скольжения $F_{тр.\,д.}$ и $F_{тр.\,б.}$ между ними (рис. 12). Эти силы равны по абсолютной величине μmg и сообщают бруску и доске ускорения, равные соответственно

$$a_б = \frac{\mu mg}{m} = \mu g,$$

$$a_д = -\frac{\mu mg}{M} = -\mu \frac{m}{M} g.$$

Таким образом, скорость бруска будет увеличиваться со временем, а скорость доски уменьшается.

Если начальная скорость доски невелика, то через некоторое время после начала движения скорости бруска и доски станут равными, после чего брусок и доска будут дви-

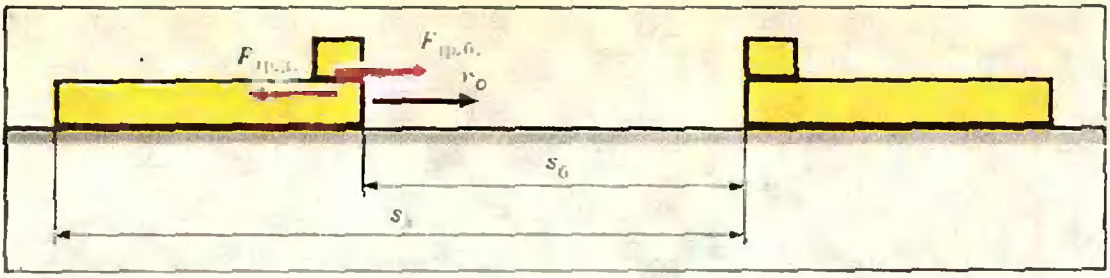


Рис. 12.

гаться как одно целое, то есть с одной и той же скоростью. Если разность перемещений бруска и доски к этому моменту равна длине бруска (рис. 12), то брусок в дальнейшем будет двигаться, находясь на краю доски. Брусок соскользнет с доски, если эта разность перемещений будет больше L.

Найдем скорость v совместного движения бруска и доски. Так как на систему доска — брусок в горизонтальном направлении не действуют внешние силы, то импульс этой системы со временем не меняется. Поэтому

$$Mv_0 + m\cdot 0 = (M+m)\,v,$$

откуда

$$v = \frac{M}{M+m}\,v_0.$$

Для нахождения величин перемещений доски и бруска воспользуемся формулой, которая связывает скорости тела v_1 и v_2 в некоторые моменты времени с его ускорением a и перемещением s за время между этими моментами:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2as.$$

Начальная скорость бруска $v_1 = 0$, а в тот момент, когда скорости бруска и доски станут равными, $v_2 = v$. Поэтому величина перемещения бруска к этому моменту равна

$$s_б = \frac{v^2}{2a_б} = \frac{M^2v_0^2}{2(M+m)^2\mu g}.$$

Аналогично найдем величину перемещения доски:

$$s_д = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_д} = \frac{M(m+2M)\,v_0^2}{2\mu g(M+m)^2}.$$

Брусок соскользнет с доски, если

$$s_д - s_б > L,$$

или

$$\frac{M(m+2M)}{2\mu g(M+m)^2}\,v_0^2 - \frac{M^2}{2(M+m)^2\mu g}\,v_0^2 > L.$$

Отсюда найдем, каким должно быть v_0:

$$v_0 > \sqrt{2\mu g L\left(1+\frac{m}{M}\right)}.$$

Ф229. *Однородной тонкой шайбе, лежащей на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщают вращательное движение с угловой скоростью ω_0 и поступательное со скоростью v_0 (рис. 13). По какой траектории движется центр шайбы? В каком случае шайба пройдет больший путь до остановки: при $\omega_0 = 0$ или при $\omega_0 \neq 0$ (v_0 одинаково в обоих случаях)?*

Для нахождения траектории движения центра шайбы необходимо выяснить, какие силы действуют на шайбу. Так как шайба находится на шероховатой поверхности, то очевидно, что единственная сила, которая действует на шайбу в горизонтальной плоскости, это сила трения, которая всегда направлена противоположно возможному перемещению тела. Каждая точка шайбы одновременно участвует в двух движениях: в поступательном и вращательном. Поэтому величина и направление результирующей скорости для каждой точки свои. Значит, и силы трения, действующие на различные участки шайбы, различны. Поэтому для определения результирующей силы трения разобьем шайбу на элементарные участки и рассмотрим силы, на них действующие.

Выделим два одинаковых участка шайбы *1* и *2*, расположенных симметрично относительно диаметра шайбы, перпендикулярного направлению скорости v_0 (рис. 14). На эти участки действуют одинаковые по абсолютной величине силы трения $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = kmg$ (m — масса участка, k — коэффициент трения). Направления же сил трения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ различны. Найдем эти направления.

Скорость каждого из участков равна сумме скорости поступательного движения центра шайбы $\mathbf{v}_0$ и линейной скорости вращения этого участка относительно центра шайбы $\mathbf{u}$, перпендикулярной радиусу $\mathbf{R}$, проведенному к этому участку из центра шайбы.

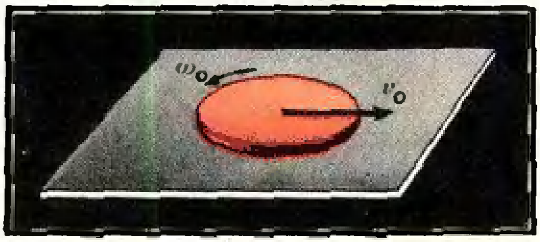


Рис. 13.

Так как $R_1 = R_2$, то $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = \omega^2 R$, то есть линейные скорости по величине равны. Кроме того, углы, которые составляют скорости $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ с направлением вектора $\mathbf{v}_0$, одинаковы. Это означает, что скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ участков *1* и *2* тоже равны по абсолютной величине, составляют с направлением вектора $\mathbf{v}_0$ одинаковые углы β, но отклонены от направления вектора $\mathbf{v}_0$ в разные стороны. Силы трения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ и направлены противоположно векторам $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ соответственно. Их вертикальные составляющие, очевидно, равны между собой по абсолютной величине, но направлены в противоположные стороны, поэтому их сумма равна нулю. Следовательно, суммарная сила трения, действующая на симметричные элементарные участки шайбы, равна сумме горизонтальных составляющих и направлена противоположно вектору $\mathbf{v}_0$.

Рассматривая и другие подобные пары элементов, мы придем к выводу, что результирующая сила трения, действующая на весь диск, тоже направлена противоположно скорости $\mathbf{v}_0$. Эта сила может изменить абсолютную величину скорости поступательного движения центра шайбы, но не может изменить ее направление (ускорение, сообщаемое шайбе силой трения, направлено противоположно скорости центра шайбы). Следовательно, траекторией движения шайбы будет прямая линия.

Если в начальный момент $\omega_0 = 0$, то все силы трения, действующие на элементарные участки шайбы, направлены одинаково, то есть против скорости $\mathbf{v}_0$. Поэтому результирующая сила трения, равная их сумме, больше по величине, чем в предыдущем случае. Больше будет и величина ускорения. Следовательно, путь, пройденный шайбой до остановки, будет меньше в том случае, когда $\omega_0 = 0$, и больше, когда $\omega_0 \neq 0$.

Ф230. *На систему, состоящую из двух соединенных пружиной шариков массы m, покоящуюся на гладкой горизонтальной поверхности, налетает слева шарик массы M (рис. 15). Происходит лобовой абсолютно упругий удар. Найти приближенно отношение масс $\gamma = \frac{m}{M}$, при котором удар произойдет еще раз.*

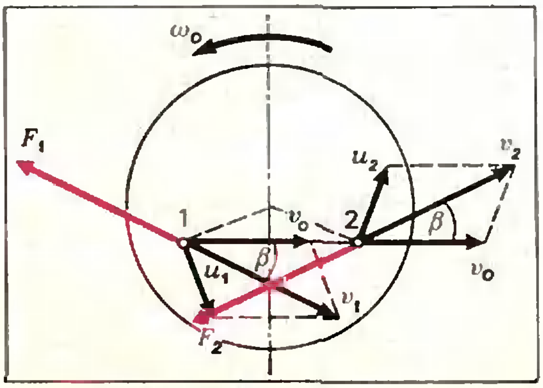


Рис. 14.

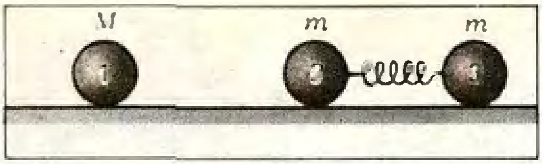


Рис. 15.

После соударения шариков *1* и *2* шарик *1* будет двигаться поступательно с некоторой постоянной скоростью. Центр масс системы шариков *2* и *3* тоже будет двигаться поступательно с постоянной скоростью, и, кроме того, шарики *2* и *3* будут колебаться относительно их центра масс. Для того чтобы ответить на вопрос, столкнутся ли шарики *1* и *2* второй раз, нужно найти зависимость координат этих шариков от времени и посмотреть, могут ли эти координаты совпасть.

Будем считать, что удар мгновенный. В этом случае он происходит так же, как соударение двух свободных шариков, не связанных с другими телами, и можно воспользоваться законами сохранения импульса и энергии*). Обозначим скорость шарика *1* до соударения v_0, его скорость после соударения v_1 и скорость шарика *2* после соударения v_2. Тогда можно записать

$$Mv_0 = Mv_1 + mv_2,$$

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Из этих уравнений нетрудно найти v_1 и v_2:

$$v_1 = v_0\frac{M-m}{M+m} = v_0\frac{1-\gamma}{1+\gamma},$$

$$v_2 = v_0\frac{2M}{M+m} = v_0\frac{2}{1+\gamma}.$$

После соударения первый шарик будет двигаться равномерно, и его координата будет меняться со временем по закону

$$x_1 = v_1 t = v_0\frac{1-\gamma}{1+\gamma}t.$$

Центр масс шариков *2* и *3* будет тоже двигаться равномерно, но со скоростью

$$v_ц = \frac{v_2}{2} = v_0\frac{1}{1+\gamma}$$

(так как шарики *2* и *3* одинаковые). Это означает, что координата центра масс меняется со временем по формуле

*) Время соударения τ должно быть таким, чтобы можно было не учитывать смещения шарика *2* и деформации пружины. Для этого должно выполняться неравенство: $\tau \ll T$, где T — период колебаний шарика *2* относительно центра масс шариков *2* и *3*.

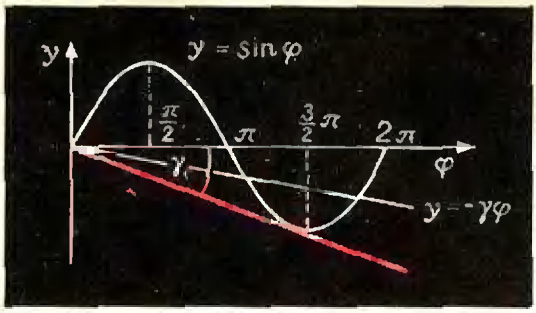


Рис. 16.

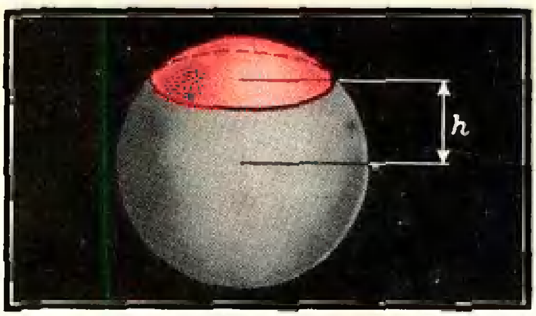


Рис. 17.

$$x_ц = v_0 \frac{1}{1+\gamma} t.$$

Рассмотрим движение шариков *2* и *3* в системе координат, связанной с их центром масс. В этой системе в начальный момент шары движутся навстречу друг другу с равными по абсолютной величине скоростями, поэтому в дальнейшем каждый из шаров будет совершать гармоническое колебание (относительно центра масс) по закону:

$$x = A \sin \omega t.$$

Если жесткость половины пружины обозначить k, то частота этих колебаний $\omega = \sqrt{k/m}$. Амплитуду колебаний A можно найти, воспользовавшись законом сохранения энергии. В начальный момент пружина не деформирована, шарик *2* имеет скорость $\frac{v_2}{2}$ и энергию $\frac{mv_0^2}{2(1+\gamma)^2}$. Эту энергию приравняем энергии упругой деформации пружины в тот момент, когда отклонение шарика от положения равновесия максимально и равно амплитуде колебаний A:

$$\frac{mv_0^2}{2(1+\gamma)^2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Отсюда найдем A:

$$A = \sqrt{\frac{mv_0^2}{(1+\gamma)^2 k}} = \frac{v_0}{(1+\gamma)\omega}.$$

Теперь можно записать зависимость координаты шарика *2* от времени в системе координат, связанной с горизонтальной плоскостью:

$$x_2 = v_ц t + A \sin \omega t =$$

$$= v_0 \frac{1}{1+\gamma} t + \frac{v_0}{(1+\gamma)\omega} \sin \omega t.$$

Шарики *1* и *2* столкнутся еще раз, если возможно равенство $x_1 = x_2$, то есть

$$v_0 t \frac{1-\gamma}{1+\gamma} = \frac{v_0 t}{1+\gamma}\left(1 + \frac{1}{\omega t} \sin \omega t\right),$$

или

$$\sin \omega t = -\gamma \omega t.$$

Подобные уравнения удобно решать графически. Нарисуем графики для правой и левой частей последнего уравнения как функции $\varphi = \omega t$ (рис. 16). Решения уравнения определяются точками пересечения прямой $y = -\gamma\varphi$ и синусоиды $y = \sin \varphi$. Очевидно, решение существует, если $\gamma \leqslant \gamma_1 \approx \operatorname{tg} \gamma_1$. Из рисунка видно, что

$$\gamma_1 \approx \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)} \approx 0{,}21,$$

то есть отношение масс равно приблизительно 0,21.

Ф231. *Заряженный металлический шар радиуса R разрезан на две части по плоскости, отстоящей на расстоянии h от центра (рис. 17). Найти силу, с которой отталкиваются эти части. Полный заряд шара Q.*

Так как шар металлический, заряд Q распределится равномерно по его поверхности, поэтому в дальнейшем мы будем говорить о заряженной сфере. Для того чтобы определить силу, действующую, например, на верхнюю часть сферы со стороны нижней, разобьем эту часть сферы на элементарные участки и найдем сначала силу F_i, действующую на один из таких участков (рис. 18):

$$F_i = qE,$$

где q — заряд выделенного участка, E — напряженность поля, созданного всей остальной частью сферы. Величина $q = \frac{Qs_i}{4\pi R^2}$, где s_i — площадь выделенного участка.

Как известно, напряженность поля вне сферы у ее поверхности равна

$$E_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{Q}{R^2},$$

а напряженность поля внутри сферы равна нулю. Из принципа суперпозиции следует, что поле как внутри, так и вне сферы складывается из поля выделенного участка сферы и поля остальной части сферы. Будем счи-

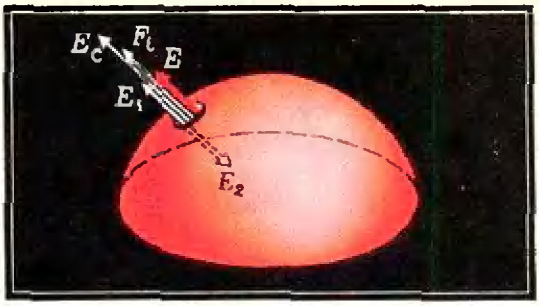


Рис. 18.

тать, что выделенный участок достаточно мал, так что его можно считать плоским. Тогда напряженности поля этого участка как внутри, так и вне сферы равны по абсолютной величине, направлены перпендикулярно площадке, но противоположно друг другу, то есть

$$\mathbf{E}_1 = -\mathbf{E}_2 \text{ и } |\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2|.$$

Пусть для определенности заряд сферы положителен, тогда векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ направлены так, как показано на рисунке 18.

Поскольку напряженность поля внутри сферы равна нулю, то сумма векторов $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}$ (напряженность поля остальной части сферы) равна нулю, то есть

$$\mathbf{E}_2 = -\mathbf{E} \text{ и } |\mathbf{E}_2| = |\mathbf{E}|.$$

Тогда, для напряженности поля вне сферы можно записать

$$E_C = E + E_1 = E + E_2 = 2E,$$

откуда

$$E = \frac{1}{2} E_C = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{Q}{R^2}.$$

Это означает, что сила $\mathbf{F}_i$ равна по абсолютной величине

$$F_i = Eq = \frac{Q^2 s_i}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon R^4}.$$

Теперь найдем силу $\mathbf{F}$, действующую на всю верхнюю часть сферы. Для этого нужно найти сумму сил $\mathbf{F}_i$, действующих на элементарные участки «верхушки» сферы. Из симметрии очевидно, что горизонтальные составляющие сил $\mathbf{F}_i$ при сложении уничтожают друг друга. Поэтому

$$F = \Sigma F_{i_{\text{верт}}} = \Sigma F_i \cos\alpha_i = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon R^4} \Sigma s_i \cos\alpha_i$$

(α — угол, который вектор $\mathbf{F}_i$ составляет с вертикалью). Так как $s_i \cos\alpha_i$ — это проекция площади участка на горизонтальную плоскость, а она равна площади проекции этого участка, то ясно, что сумма $\Sigma s_i \cos\alpha_i$ равна площади S поверхности «дна» верхней части сферы, радиус которой равен $\sqrt{R^2 - h^2}$. То есть $S = \pi(R^2 - h^2)$

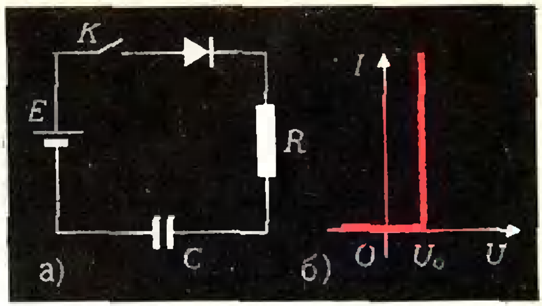


Рис. 19.

и

$$F = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}\left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right).$$

Ф232. *Диод включен в цепь, изображенную на рисунке 19, а. Идеализированная вольтамперная характеристика диода приведена на рисунке 19, б. Конденсатор предварительно не заряжен. Ключ K замыкают. Какое количество тепла выделится на сопротивлении R при зарядке конденсатора? Емкость конденсатора C, э. д. с. источника E. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.*

После замыкания ключа в цепи возникает ток, величина которого будет постепенно уменьшаться. Как следует из вольтамперной характеристики диода, напряжение на диоде равно U_0 при всех значениях тока вплоть до нуля. Поэтому зарядка конденсатора и ток в цепи прекратятся тогда, когда напряжение на конденсаторе станет равным

$$U_C = E - U_0,$$

при этом по цепи пройдет заряд

$$q = CU_C = C(E - U_0).$$

Согласно закону сохранения энергии работа источника тока по перенесению заряда по всей цепи равна сумме работ на отдельных участках:

$$A = A_R + A_Д + W_C.$$

Здесь $A = Eq$ — работа источника тока; $A_Д = U_0 q$ — работа на участке цепи, содержащем диод; $W_C = \frac{1}{2} qU_C = \frac{1}{2} q(E - U_0)$ — энергия заряженного конденсатора; A_R — работа по перенесению заряда через сопротивление R, которая целиком перешла в тепло Q.

Поэтому

$$Q = Eq - U_0 q - \frac{1}{2} q(E - U_0) = \frac{1}{2} q(E - U_0) = \frac{1}{2} C(E - U_0)^2.$$

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Задачи о пересечении тел

И. Ф. Шарыгин

В этой статье разбираются решения нескольких довольно трудных и, на наш взгляд, полезных задач на вычисление объемов пересечений тел. Основная трудность подобных задач заключается в том, что при их решении требуется хорошо развитое пространственное воображение. В частности, при решении любой задачи о пересечении тел очень важно суметь сделать хороший чертеж. Нередко именно от чертежа зависит успех в решении задачи. Прежде чем перейти к разбору задач, дадим вам следующий совет: прочтя условие той или иной задачи, не смотрите сразу же ее решение, подумайте некоторое время, попытайтесь сделать чертеж и решить задачу самостоятельно. Тогда вы получите и удовлетворение, и возможность сравнить свое решение с предлагаемым в статье (вполне возможно, что вам удастся придумать решение, отличное от приводимого в статье). Если ваши усилия не увенчаются успехом, то все равно время, потраченное на раздумья, пойдет на пользу и облегчит чтение статьи.

Задача 1. *В кубе с ребром а помещены три правильные четырехугольные призмы, вершины каждой из которых являются серединами ребер двух противоположных граней куба. Найти объем части куба, принадлежащей всем этим трем призмам.*

Поскольку довольно трудно представить себе, а тем более сразу изобразить искомое тело, поступим следующим образом. Поместим сначала в куб одну призму (рис. 1), затем посмотрим, что «отсечет» от нее вторая, и, наконец, что останется, когда мы добавим третью призму.

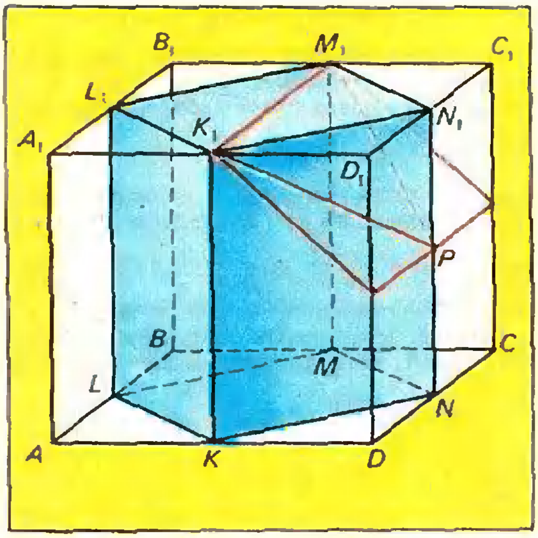


Рис. 1.

Пусть вершинами второй призмы являются середины ребер AA_1, A_1D_1, D_1D, AD, BB_1, B_1C_1, C_1C и CB (основания этой призмы лежат в «передней» и «задней» гранях куба). Ребро второй призмы, соединяющее середины ребер DD_1 и CC_1 куба, пересекает отрезок NN_1 в его середине. Значит, грань второй призмы, проходящая через точки K_1M_1 и середины ребер DD_1 и CC_1, пересекаются с гранью KK_1N_1N по прямой K_1P, а вся эта грань второй призмы отсекает от первой пирамиду $K_1M_1PN_1$.

Проведя аналогичные рассуждения для остальных граней второй призмы, мы можем изобразить общую часть первых двух призм (рис. 2). Она представляет собой две четырехугольные пирамиды: KK_1M_1MP и KK_1M_1MQ (P и Q — центры граней DCC_1D_1 и ABB_1A_1), сумма объемов которых равна $\frac{a^3}{3}$, так как $S_{KK_1M_1M} = a^2$ и $PQ = a$.

Теперь посмотрим, что «отрежет» от этого тела третья призма, основания которой лежат в гранях ABB_1A_1 и DCC_1D_1. Боковые грани этой призмы «срежут» четыре вершины: K_1, M_1, K и M. На рисунке 3 изображена пирамида KK_1M_1MP со «срезанными» третьей призмой углами. «Отрезанные» углы являются равными треугольными пирамидами. (Одна из них — $RTSK_1$, где R, T и S — середины KK_1, K_1M_1 и PK_1). Объем каждой из них составляет 1/16 часть объема пирамиды KK_1M_1MP (это легко проверяется; например, объем пирамиды $RTSK_1$ в восемь раз меньше объема пирамиды KM_1PK_1, который вдвое меньше объема пирамиды PKK_1M_1M; подробные вычисления и доказательства проведите самостоятельно).

Таким образом, от пирамид отсекается $4 \times 1/16 = 1/4$ часть. Объем общей части всех трех призм составляет 3/4 объема общей части первой и второй призм, равного $\frac{a^3}{3}$, то есть он равен $\frac{a^3}{4}$.

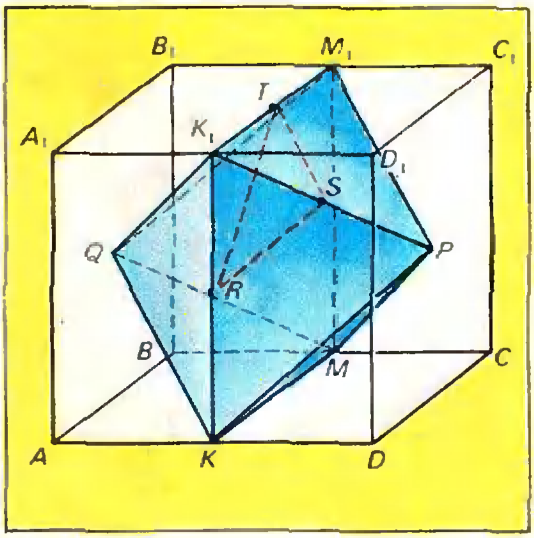


Рис. 2.

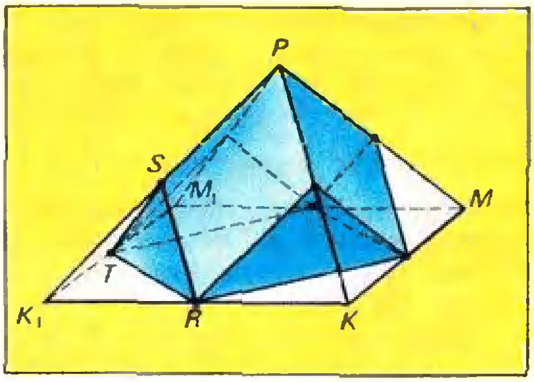


Рис. 3.

Задача 2. *Даны две равные правильные треугольные пирамиды объема V каждая, расположенные симметрично относительно точки O. Найти объем общей части этих двух пирамид, если точка O лежит на высоте одной из них и делит эту высоту в отношении 2 : 1, считая от вершины пирамиды.*

В этой задаче чрезвычайно важно, хотя и достаточно трудно, сделать правильный, хороший, обоснованный чертеж. Пусть $SABC$ — первая пирамида. Основание $A_1B_1C_1$ второй пирамиды пересекает высоту SH_1 в точке H, делящей ее в отношении 1 : 2 (считая от вершины S), а в пересечении с пирамидой $SABC$ дает треугольник MNP, подобный треугольнику ABC, $MN = \frac{1}{3}AB$.

Отсюда легко вывести (проверьте!), что треугольник MNP целиком находится внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично внутри основания ABC будет находиться треугольник $M_1N_1P_1$, являющийся сечением второй пирамиды плоскостью треугольника ABC.

Теперь можно изобразить тело, являющееся общей частью рассматриваемых двух пирамид (рис. 4), причем положение, например, точки L находится так: надо соединить точку S с серединой ребра BC, пересечение этой прямой с прямой S_1A_1 даст точку L (для доказательства рассмотрите сечение пирамид плоскостью SA_1S_1). Аналогично находятся остальные точки на рисунке 4. Для вычисления искомого объема мы должны от объема пирамиды $SABC$ отнять объем пирамиды $SMNP$ (этот объем составляет $\frac{1}{27}V$), затем отнять объемы трех одинаковых пирамид, равных $KTRC$, и прибавить объемы трех «маленьких» пирамид, равных QM_1RL.

Найдем объем пирамиды $KTRC$. Так как плоскость KRT параллельна плоскости SAB, то $V_{KTRC}=\left(\frac{TR}{AB}\right)^3 V$. Аналогично, $V_{QM_1RL}=\left(\frac{M_1R}{AB}\right)^3 V$. Но $M_1R=\frac{TR-M_1N_1}{2}=\frac{3TR-AB}{6}$. Нам осталось найти $\frac{TR}{AB}$. Треугольники ABC и $M_1N_1P_1$ правильные, имеют соответственно параллельные стороны, их центры совпадают, и $M_1N_1=\frac{AB}{3}$. Отсюда легко найти, что $\frac{TR}{AB}=\frac{5}{9}$, $\frac{M_1R}{AB}=\frac{1}{9}$ (проверьте!). Искомый объем равен $V-\frac{1}{27}V-3\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^3V+$

$$+3\left(\frac{1}{9}\right)^3\cdot V=\frac{110}{243}V.$$

Задача 3. *Дан куб с ребром a. Второй куб получается из данного поворотом вокруг его диагонали на угол α ($\alpha \leqslant 60°$). Найти объем общей части этих кубов.*

В этой задаче представить себе и изобразить пересечение тел в целом трудно, легче понять, как пересекаются отдельные элементы одного тела с элементами другого тела.

Обозначим вершины данного куба буквами A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 (см. рис. 5), и пусть куб поворачивается вокруг диагонали B_1D против хода часовой стрелки. Посмотрим, какие куски исходного куба могут срезаться при его повороте. Вершины куба расположены дальше всего от центра куба O — середины диагонали B_1D, которая остается на месте. Поэтому уйти при повороте внутрь куба вершины не могут, наоборот они окажутся вне куба и срезаться будут куски куба около вершин. Далее, срезать куски куба могут только грани. Поэтому достаточно найти, какой кусок куба срезает каждая грань.

Найдем, что срежет грань DCC_1D_1. Подскажем сразу ответ: срезается пирамида D_1LPD (см. рис. 5), где $D_1L=D_1K=C_1P$, причем основания перпендикуляров, опущенных из точек L и K на B_1D,

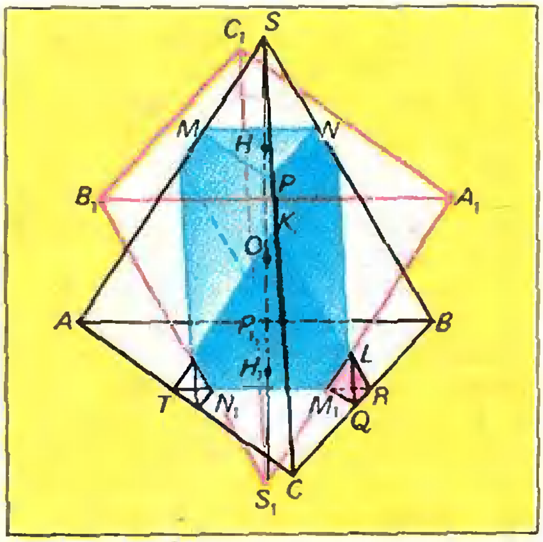


Рис. 4.

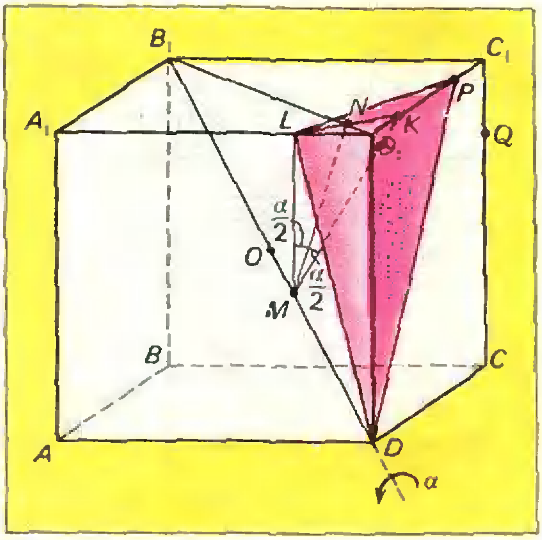


Рис.

совпадают (докажите!) в точке, которая на рисунке 5 обозначена буквой M, и $\angle LMK=\alpha$. Таким образом, при повороте куба точка K переходит в точку L. Обозначим LD_1 через x (его мы найдем позднее). Пусть Q — точка на ребре CC_1, $C_1Q=C_1P=x$. Тогда при повороте куба точка Q переходит в точку P (докажите!). Итак, грань DCC_1D_1 пересекает куб по треугольнику LPD и отсекает пирамиду D_1LPD объема $\frac{1}{6}ax(a-x)$ (докажите!). Аналогично рассматриваются остальные грани — они отсекают такие же пирамиды. Поэтому объем общей части кубов будет $a^3-ax(a-x)$. Осталось найти x.

Пусть N — точка пересечения B_1D_1 и LK. Изобразим на отдельном чертеже (рис. 6) прямоугольник BDD_1B_1. Пусть T — основание перпендикуляра, опущенного из D_1 на B_1D. Имеем: $LN=ND_1=\frac{LK}{2}=\frac{x\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 5). Из $\triangle LMK$ получим:

$$MN=LN\cdot\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{x\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$B_1N=B_1D_1-ND_1=a\sqrt{2}-\frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

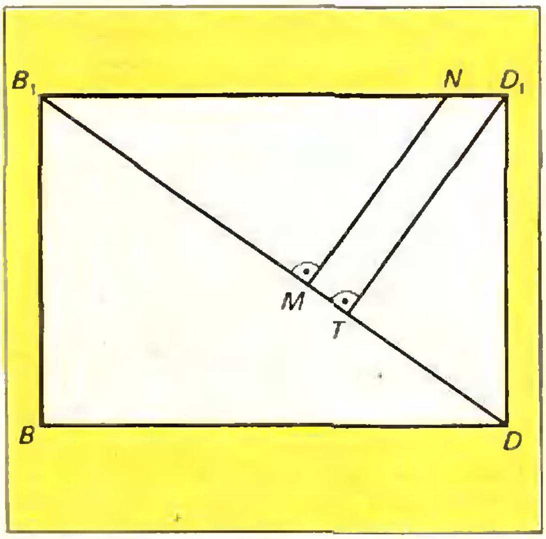


Рис. 6.

Легко из $\triangle B_1D_1D$ найти D_1T: $D_1T=a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Из подобия треугольников B_1NM и B_1D_1T получим:

$$\frac{B_1N}{B_1D_1}=\frac{NM}{D_1T},$$

$$\frac{a\sqrt{2}-x\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}}=\frac{x\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{a\sqrt{\frac{2}{3}}},$$

откуда $x=\frac{2a}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}$, искомый объем равен

$$V=a^3-\frac{2a^2}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}\times\left(a-\frac{2a}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{3a^3}{2[1+\cos(\alpha-60^\circ)]}.$$

Задача 4. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Середины двух его противоположных ребер AB и C_1D_1 служат серединами двух скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, причем на одном из этих ребер лежит соответствующее ребро куба. Найти объем общей части куба и тетраэдра.*

Пусть точка K — середина AB — является серединой ребра PQ правильного тетраэдра, а M — середина D_1C_1 и одновременно середина ребра RS тетраэдра (D_1C_1 лежит на RS (рис. 7)).

Если ребро тетраэдра равно b, то расстояние между серединами его скрещивающихся ребер легко вычисляется, оно равно $b\frac{\sqrt{2}}{2}$ (проверьте!). С другой стороны, $MK=a\sqrt{2}$. Значит, $b=2a$.

Мы знаем длину ребра тетраэдра, однако не так просто изобразить пересечение данных тел — неясно, будут ли ребра тетраэдра пересекать куб. Чтобы ответить на этот вопрос,

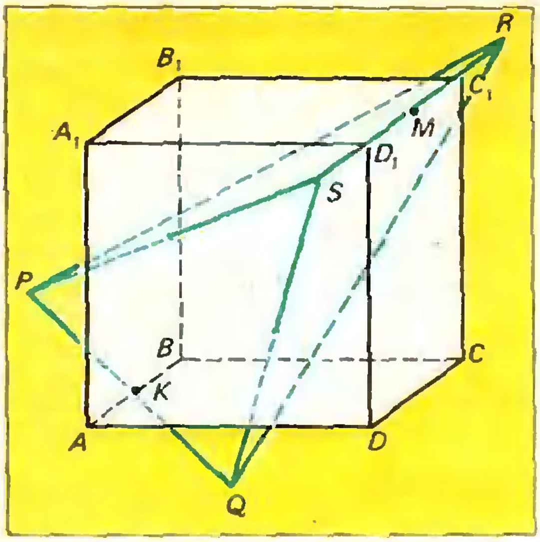


Рис. 7.

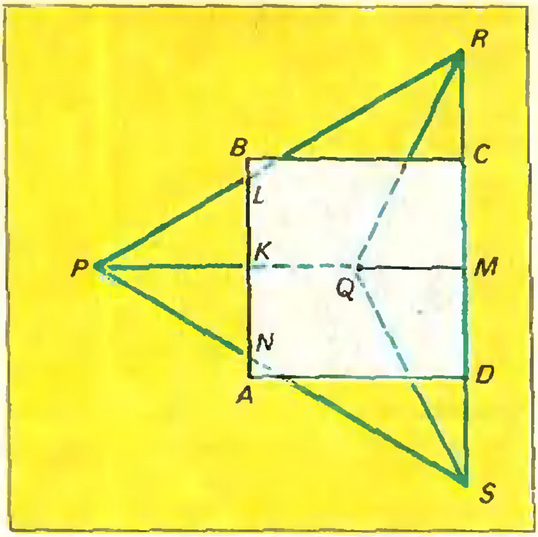


Рис. 8.

спроектируем данные тела на плоскость $ABCD$ (рис. 8). Поскольку PQ составляет с этой плоскостью угол 45° (докажите!), то длина проекции PQ на эту плоскость будет

$$b\frac{\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}.$$

Пусть L — точка пересечения проекций прямых AB и PR. Из подобия треугольников PLK и PMR легко найдем:

$$LK=\frac{RM\cdot PK}{PM}=a\frac{1}{1+\sqrt{2}}<\frac{a}{2}.$$

Значит, ребро PR тетраэдра (а следовательно, и другие ребра: PS, QR и QS) пересекает куб.

Для вычисления объема удобно изобразить заданное тело как тетраэдр со срезанными углами. Чтобы определить, какую часть объема тетраэдра составляет каждая из срезанных пирамид, удобно воспользоваться следующим утверждением (докажите его самостоятельно), которое оказывается полезным довольно часто.

Даны две пирамиды $SABC$ и $SA_1B_1C_1$, причем A_1 лежит на SA; B_1 на SB; C_1 на SC. Тогда отношение объемов этих пирамид равно отношению произведений длин ребер, выходящих из вершины S, а именно

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}}=\frac{SA_1\cdot SB_1\cdot SC_1}{SA\cdot SB\cdot SC}.$$

Теперь легко можно найти объемы пирамид, «отрезанных» от вершин P и Q. Каждый из них составляет $\frac{PK}{PQ}\cdot\frac{PL}{PR}\cdot\frac{PN}{PS}=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2(3+2\sqrt{2})}$$

часть объема тетраэдра, а объемы пирамид, «отрезанных» от вершин R и S, составляют $^1/_{16}$ объема тетраэдра (проверьте!). Объем тетраэдра равен $\frac{b^3\sqrt{2}}{12}=\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. Значит, объем общей части куба и тетраэдра будет равен

$$\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}\left(1-\frac{1}{3+2\sqrt{2}}-\frac{1}{8}\right)=$$

$$=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}(16\sqrt{2}-17).$$

Упражнения

1. Даны две равные правильные треугольные пирамиды, симметричные относительно точки O, расположенной на высоте одной из этих пирамид. Найти объем общей части этих двух пирамид, если точка O делит эту высоту, считая от вершины пирамиды, в отношении: а) 3 : 1; б) 1 : 1; в) 4:1.

2. Дан правильный тетраэдр объема V. Второй тетраэдр получается из данного поворотом его на угол α вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер тетраэдра. Найти объем общей части этих двух тетраэдров.

3. Треугольная пирамида $PQMN$ и куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены следующим

образом: середина ребар PQ совпадает с серединой ребра AB и $PQ = 2AB$, ребро D_1C_1 лежит на ребре MN, их середины совпадают, $MN = 3D_1C_1$. Какая часть объема пирамиды расположена внутри куба, если известно, что PQ перпендикулярно плоскости ABD_1C_1?

4. Ребро одного правильного тетраэдра служит апофемой другого тетраэдра. Апофема противоположной данному ребру грани первого тетраэдра лежит на ребре второго. Какая часть объема первого тетраэдра расположена внутри второго?

5. Центры куба и правильного тетраэдра совпадают, два ребра тетраэдра параллельны диагоналям одной из граней куба. Найти объем части тетраэдра, находящейся внутри куба, если ребро куба равно a, ребро тетраэдра равно $\frac{3a}{2}\sqrt{2}$.

6. Внутри правильной треугольной пирамиды находится вершина трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, а биссектрисы плоских углов проходят через вершины основания пирамиды. В каком отношении поверхность трехгранного угла делит объем пирамиды, если известно, что боковая поверхность пирамиды разделена на две равные по площади части?

7. Диагональ единичного куба лежит на ребре двугранного угла в 60°. Доказать, что объем части куба, находящейся внутри двугранного угла, имеет постоянную величину, и найти этот объем.

8 (МГУ, физфак, 1963). Ребро куба равно a. Сфера с центром O пересекает три ребра, сходящиеся в вершине A, в их серединах. Из точки B пересечения сферы с одним из ребер куба опущен перпендикуляр на диагональ куба, проходящую через вершину A, причем угол между этим перпендикуляром и радиусом OB делится ребром куба пополам. Найти радиус сферы.

9 (МГУ, физфак, 1968). В правильной треугольной пирамиде высота равна h, сторона основания равна a. Одна из вершин основания является центром сферы, касающейся противоположной грани пирамиды. Найти площадь тех частей боковых граней пирамиды, которые расположены внутри сферы.

10 (МФТИ, 1968). В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD взаимно перпендикулярны и равны a и b соответственно. Общий перпендикуляр к этим ребрам пересекает ребро AB в точке M и ребро CD в точке N; $MN = c$. В тетраэдр вписан куб так, что четыре ребра куба параллельны MN и на каждой грани тетраэдра лежат в точности две вершины куба. Найти ребро куба.

Биосфера и ЭМП

(Окончание. Начало см. с. 42)

то есть в несколько тысяч раз, изменяет деятельность зрительного анализатора у человека, вызывает нарушения поведения и деятельности внутренних органов у мышей, затормаживает рост растений и угнетает размножение бактерий. Эти немногочисленные еще исследования приводят к выводу, что электромагнитное поле является существенным фактором, определяющим нормальную жизнедеятельность биосферы, наряду с температурой, давлением атмосферы, составом воздуха и т. п.

Электромагнитный фон Земли зависит и от солнечной активности. При анализе и выяснении тех физических факторов, которые, будучи связанными с колебаниями солнечной активности, могли повлиять на биологические земные процессы, астрономы и астрофизики называют в первую очередь электромагнитное поле. В экспериментах на животных биологи успешно подтверждают эти гипотезы.

Таким образом, можно говорить о существовании своеобразного электромагнитного «моря», которое питают естественные и искусственные источники, земные и космические. Человечеству, живущему в этом море, необходимо знать его течения, мели и острова, чтобы управлять интенсивностью биологических процессов, охранять больных от пагубных для них магнитных бурь, излечивать некоторые заболевания. Без правил плавать в этом море становится все опаснее.

(Из статьи Ю. А. Холодова «Электромагнитные поля — новые раздражители», помещенной в международном ежегоднике «Будущее науки» за 1971 год.)

И. А. Зайцев

Электрические машины постоянного тока

В этой статье мы не будем подробно обсуждать устройство различных электрических машин. Мы рассмотрим работу электромотора и динамо-машины (динамо-машина — старое название индукционного генератора электрического тока), используя два основных закона — закон Ома и закон сохранения энергии.

Статья состоит в основном из вопросов и ответов. Работая над статьей, прежде чем прочитать ответ, попробуйте ответить на вопрос самостоятельно. Даже если вам это не удастся, размышление над вопросом принесет несомненную пользу, благодаря чему лучше запомнится правильный ответ.

Электромоторы

Во всех электромоторах (или, по-другому, электродвигателях) обязательно есть одни и те же основные части. Это, прежде всего, индуктор и якорь. Индуктор является источником магнитного поля. Когда по обмотке якоря пропускается электрический ток, якорь, находящийся в магнитном поле, приходит во вращение. Таким образом происходит преобразование электрической энергии в механическую. Если, например, вал мотора соединить со станком, станок можно привести в движение.

Вопрос. *Рассмотрим мотор постоянного тока с независимым возбуждением (в нем индуктором является или постоянный магнит, или электромагнит, обмотка которого питается независимо от обмотки якоря). Как записывается закон Ома для цепи якоря такого мотора, подключенного к источнику постоянного тока?*

Ответ. В электрической цепи якоря имеются две электродвижущие силы — напряжение источника тока U и э. д. с. индукции $E_{и}$, возникающая в обмотке якоря при его вращении в магнитном поле индуктора. Причем э. д. с. индукции, согласно правилу Ленца, противоположна по знаку напряжению источника тока. Поэтому закон Ома запишется так:

$$U - E_{и} = IR, \qquad (I)$$

где I — ток в цепи, а R — общее сопротивление обмотки якоря и подводящих проводов.

Вопрос. *Как записывается закон сохранения энергии для такой цепи?*

Ответ. Энергия $W_{п} = UIt$, потребляемая от источника, тратится на джоулево тепло, которое выделяется на сопротивлении R, и на совершение полезной работы A. Поэтому, согласно закону сохранения энергии

$$UIt = I^2Rt + A,$$

или для мощностей

$$UI = I^2R + P. \qquad (II)$$

Из равенств (I) и (II) можно получить много важных следствий.

Вопрос. *Чему равна полезная мощность P?*

Ответ. Умножив обе части равенства (I) на ток I, получим

$$UI - E_{и}I = I^2R,$$

или

$$UI = I^2R + E_{и}I.$$

Сравнивая полученное равенство с равенством (II), можно сразу же заметить, что

$$P = E_{и}I,$$

то есть полезная мощность мотора равна произведению э. д. с. индукции на ток.

Вопрос. *Получив какой-нибудь результат, всегда полезно проанализировать возможные частные случаи. Мы только что выяснили, что полезная мощность мотора равна $E_{и}I$. Посмотрим, при каких условиях мотор не будет совершать механической работы, то есть $P = 0$. Что при этом происходит в цепи якоря?*

Ответ. Произведение $E_{и}I$ может быть равно нулю, если $E_{и} = 0$ или $I = 0$.

Чтобы э. д. с. индукции была равна нулю, магнитный поток, проходящий через витки обмотки якоря, не должен меняться. Это возможно, если якорь мотора заторможен, то есть не вращается. При этом по обмотке заторможенного якоря идет ток

$$I = \frac{U}{R}.$$

Мотор не совершает работы еще в одном случае, когда $I = 0$. Это возможно не только тогда, когда мотор не подключен к источнику тока. Из закона Ома следует, что $I = 0$ еще и в том случае, когда

$$E_{и} = U,$$

то есть мотор вращается с такой скоростью, что э. д. с. индукции равна по абсолютной величине напряжению источника тока. При этом мотор не потребляет электроэнергии от источника: так как $I = 0$, то и потребляемая мощность $P_{п} = UI = 0$. Якорь мотора вращается по инерции*).

*) Это следует еще и из того, что при $I = 0$ равны нулю и силы, действующие в магнитном поле индуктора на обмотку якоря.

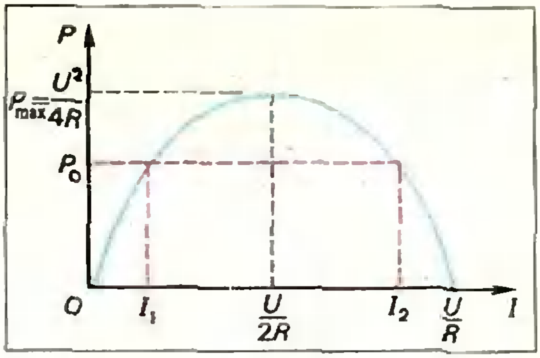


Рис. 1.

Вопрос. *Вернемся к формуле (II). Из нее следует, что полезная мощность мотора равна*

$$P = UI - I^2R.$$

Как выглядит график зависимости P от тока I?

Ответ. Это парабола, пересекающая ось I в точках $I = 0$ и $I = \frac{U}{R}$ (рис. 1). Из соображений симметрии очевидно, что полезная мощность мотора максимальна при $I = U/2R$ и равна

$$P_{max} = \frac{U^2}{4R}.$$

Вопрос. *Чему равен коэффициент полезного действия мотора с независимым возбуждением при условии, что развиваемая им мощность максимальна?*

Ответ. Как мы видели, механическая (полезная) мощность мотора максимальна при $I = \frac{U}{2R}$ и равна $P_{max} = \frac{U^2}{4R}$. Мощность, потребляемая мотором от источника, равна

$$P_{п} = UI = \frac{U^2}{2R}.$$

Следовательно, коэффициент полезного действия в рассматриваемом случае

$$\eta = \frac{P_{max}}{P_{п}} = \frac{U^2 2R}{4RU^2} = \frac{1}{2}.$$

Вопрос. *Интересно заметить, что одной и той же величине полезной мощности такого мотора соот-*

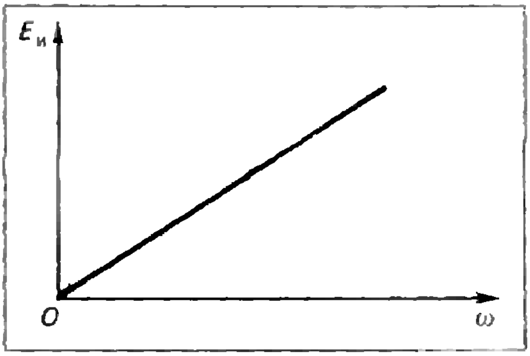


Рис. 2.

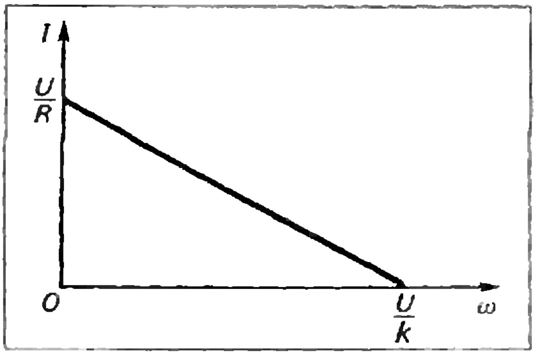


Рис. 3.

ветствуют два значения тока. Так, мощность равна P_0 при токах I_1 и I_2 (рис. 1).

Посмотрим, с чем это связано.

Ответ. Полезная мощность зависит от э. д. с. индукции, возникающей в якоре, и от тока, текущего по его обмотке:

$$P = E_и I.$$

При неизменных U и R величина тока зависит от э. д. с. индукции:

$$I = \frac{U - E_и}{R}.$$

Из закона электромагнитной индукции следует, что э. д. с. индукции, возникающая в обмотке якоря, пропорциональна скорости изменения магнитного потока $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ через эту обмотку:

$$E_и \sim \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

В свою очередь скорость изменения магнитного потока пропорциональна угловой скорости вращения якоря ω. Таким образом

$$E_и \sim \omega,$$

или

$$E_и = k\omega,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

График зависимости $E_и$ от ω показан на рисунке 2.

Теперь посмотрим, как зависят от ω ток в цепи якоря и полезная мощность двигателя. Из закона Ома

$$I = \frac{U - E_и}{R} = \frac{U - k\omega}{R},$$

а из закона сохранения энергии

$$P = UI - I^2R = E_и I = \frac{kU\omega - (k\omega)^2}{R}.$$

Графики зависимости I и P от ω приведены на рисунках 3 и 4.

Итак, каждому значению угловой скорости ω соответствуют определенные значения э. д. с. индукции $E_и$ и тока I. Причем при увеличении ω величина $E_и$ увеличивается, а величина I уменьшается. При этом полезная мощность, развиваемая мотором, оказывается одинаковой при двух разных значениях скорости вращения якоря.

Вопрос. *В свою очередь угловая скорость вращения якоря зависит от нагрузки двигателя. Как?*

Ответ. Электрические силы, действующие на якорь в магнитном поле индуктора, пропорциональны току, идущему по обмотке. Пропорциональны току и моменты этих сил, то есть

$$M_э = k_1 I,$$

где коэффициент пропорциональности k_1 зависит от конструкции двигателя. Так как

$$I = \frac{U - k\omega}{R},$$

то

$$M_э = k_1 \frac{U - k\omega}{R}.$$

То есть суммарный момент электрических сил, действующих на якорь, линейно зависит от угловой скорости вращения якоря. При малой угловой скорости вращения якоря момент сил

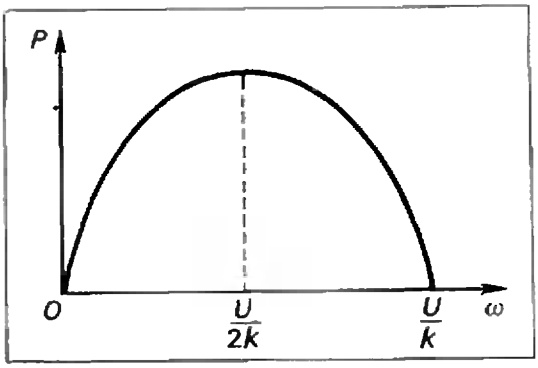


Рис. 4.

большой, при увеличении угловой скорости он уменьшается и становится равным нулю при

$$\omega = \frac{U}{k}.$$

С другой стороны, на вал двигателя действует момент механических сил, так называемый момент нагрузки M. Например, если двигатель равномерно поднимает на веревке груз, то момент нагрузки равен произведению силы натяжения веревки, которая равна весу груза, на радиус вала. В установившемся режиме якорь мотора, очевидно, вращается с такой скоростью ω, при которой момент электрических сил, действующих на якорь, равен моменту нагрузки. Действительно, пусть, например, скорость вращения якоря меньше ω. В этом случае момент электрических сил больше момента нагрузки, так что угловая скорость вращения якоря будет увеличиваться. Если угловая скорость вращения якоря больше ω, то момент электрических сил меньше момента нагрузки. Это будет приводить к уменьшению скорости вращения якоря до ω.

Таким образом, устанавливается такая угловая скорость вращения якоря, при которой

$$M_э = M,$$

то есть

$$k_1 \frac{U - k\omega}{R} = M$$

откуда

$$\omega = \frac{k_1 U - MR}{k_1 k}.$$

То есть угловая скорость вращения якоря линейно зависит от момента нагрузки.

Итак, нагрузка определяет ток в обмотке якоря и угловую скорость его вращения.

Рассмотрим такую задачу.

З а д а ч а. *Электродвигатель присоединен к источнику постоянного напряжения. При числе оборотов $n_1 = 1000$ об/мин ток в цепи якоря равен $I_1 = 10$ а, а при числе оборотов $n_2 = 900$ об/мин он равен $I_2 = 15$ а. Найти число оборотов двигателя на холостом ходу (без нагрузки).*

Так как $I = \frac{U - k\omega}{R}$, а $\omega = 2\pi n$, то

$$I_1 = \frac{U - 2\pi k n_1}{R}$$

и

$$I_2 = \frac{U - 2\pi k n_2}{R}.$$

В режиме холостого хода $I_3 = 0$, поэтому

$$U - 2\pi k n_3 = 0.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$n_3 = \frac{I_2 n_1 - I_1 n_2}{I_2 - I_1} = \frac{15 \cdot 1000 - 10 \cdot 900}{5} = 1200 \quad (об/мин).$$

Обратимость электрических машин

Все машины постоянного тока обратимы. Если на клеммы машины подать постоянное напряжение, то якорь будет вращаться, совершая механическую работу, то есть получим электромотор. С другой стороны, если вращать якорь с помощью другой машины, то электрическая машина будет работать как динамо-машина, вырабатывающая ток.

В о п р о с. *Предположим, одна и та же машина вращается с оди-*

наковой скоростью, работая один раз в качестве динамо-машины, а другой раз — в качестве мотора. Что можно сказать об э. д. с. индукции, возникающей в якоре в обоих случаях?

Ответ. Так как э. д. с. индукции зависит только от конструкции якоря и угловой скорости вращения якоря, то э. д. с. индукции в обоих случаях будет одна и та же.

Вопрос. *А если угловые скорости вращения динамо-машины и мотора разные?*

Ответ. В этом случае отношение электродвижущих сил индукции будет равно отношению угловых скоростей вращения якоря.

Вопрос. *Мы уже говорили о законе Ома и о законе сохранения энергии для мотора и записали соответствующие равенства (I) и (II). Как будут выглядеть аналогичные равенства для динамо-машины?*

Ответ. Пусть сопротивление цепи динамо-машины равно R. Тогда, согласно закону Ома

$$E_{д} = I_{д}R,$$

где $E_{д}$ — э. д. с. индукции динамо-машины и $I_{д}$ — ток.

Далее, если пренебречь потерями энергии (например, на трение), то можно записать закон сохранения энергии так:

$$P_{м} = E_{д}I_{д}.$$

Здесь $P_{м}$ — механическая мощность, затрачиваемая на вращение якоря, $E_{д}I_{д}$ — электрическая мощность, развиваемая динамо-машиной.

Решим теперь несколько задач.

Задача 1. *Электромотор постоянного тока с независимым возбуждением, включенный в цепь батареи с напряжением $U = 24$ в, при полном сопротивлении цепи $R = 20$ ом делает $n_1 = 600$ об/мин при токе в цепи $I = 0,2$ а. Какую э. д. с. разовьет тот же мотор, работая в качестве динамо-машины, при $n_2 = 1400$ об/мин?*

Э. д. с., развиваемая динамо-машиной, равна

$$E_{д} = \frac{n_2}{n_1} E_{и},$$

где $E_{и}$ — э. д. с., возникающая в обмотке якоря мотора при скорости вращения $n_1 = 600$ об/мин. Ее можно найти из закона Ома:

$$E_{и} = U - IR.$$

Поэтому

$$E_{д} = \frac{n_2}{n_1}(U - IR) = \frac{1400}{600}(24 - 0,2\cdot 20) \approx 46,7 \ (в).$$

Задача 2. *Груз массой m подвешен на нити, намотанной на ось якоря динамо-машины с независимым возбуждением. Нить сматывается с оси так, что груз опускается с постоянной скоростью v_1. Динамо-машина замкнута на сопротивление R. С какой скоростью v_2 будет подниматься вверх тот же груз, если динамо-машину включить как электромотор в цепь постоянного тока с напряжением U и с тем же сопротивлением цепи R?*

Мощность мотора, поднимающего груз массой m со скоростью v_2, равна mgv_2. Из закона Ома и закона сохранения энергии следует, что

$$U - E_{и} = IR \qquad (1)$$

и

$$UI = I^2R + mgv_2, \qquad (2)$$

где I — ток и $E_{и}$ — э. д. с. индукции в обмотке якоря. Эта э. д. с. связана с э. д. с. индукции динамо-машины соотношением

$$\frac{E_{и}}{E_{д}} = \frac{v_2}{v_1}. \qquad (3)$$

Запишем теперь закон Ома и закон сохранения энергии для динамо-машины:

$$E_{д} = I_{д}R$$

и

$$E_{д} I_{д} = mgv_1.$$

Отсюда

$$E_{д} = \sqrt{mgv_1R},$$

и из соотношения (3)

$$E_{и} = \frac{v_2}{v_1} E_{д} = \frac{v_2}{v_1} \sqrt{mgv_1 R}.$$

Подставив полученное выражение для $E_{и}$ в уравнение (1) и решая затем уравнения (1) и (2) совместно, найдем

$$v_2 = \frac{\sqrt{mgv_1 R}\, U - mgv_1 R}{mgR} =$$

$$= U \sqrt{\frac{v_1}{mgR}} - v_1.$$

Задача 3 (Ф226). *Электромотор постоянного тока с независимым возбуждением (с постоянным магнитом) поднимает груз со скоростью v_1 при помощи нити, наматывающейся на ось мотора. В отсутствие груза невесомая нить поднимается со скоростью v_0. С какой скоростью v_2 будет опускаться тот же груз, если в цепи якоря произойдет замыкание, в результате которого обмотка якоря окажется замкнутой накоротко? Трением в подшипниках пренебречь.*

После того как обмотка окажется замкнутой накоротко, мотор превратится в динамо-машину, причем ток I в якоре динамо-машины будет таким же, каким он был, когда машина работала как электромотор. Действительно, в обоих случаях один и тот же груз движется (поднимается или опускается) равномерно. Поэтому момент сил, действующих на якорь со стороны магнитного поля индуктора и пропорциональный величине тока, равен моменту силы тяжести груза. При подъеме невесомой нити (в режиме холостого хода) момент нагрузки равен нулю, следовательно, и ток $I_0 = 0$. Запишем закон Ома для всех трех случаев.

При подъеме груза с помощью мотора

$$U - E_{и} = IR, \qquad (1)$$

где U — напряжение на клеммах мотора.

При опускании груза, когда мотор работает как динамо-машина

$$E_{д} = IR. \qquad (2)$$

Когда мотор работает на холостом ходу

$$U - E'_{и} = 0. \qquad (3)$$

Для трех э. д. с. $E_{и}$, $E'_{и}$ и $E_{д}$ можно записать следующие соотношения:

$$E_{и} = \frac{v_1}{v_2} E_{д} \qquad (4)$$

и

$$E'_{и} = U = \frac{v_0}{v_2} E_{д}. \qquad (5)$$

Окончательно из равенств (1) — (5) находим

$$v_2 = v_0 - v_1.$$

Упражнения

1. Электромотор без нагрузки делает 1000 *об/мин*, а с некоторой нагрузкой — 700 *об/мин*. Какой будет частота его вращения, если момент нагрузки увеличится на 20%?

2. Электродвигатель присоединили к источнику напряжения 500 *в*. Зная, что при токе 10 *а* он развивает мощность 4 *квт*, найти его мощность при токе 20 *а* (ток меняется вследствие изменения нагрузки).

3. Угловая скорость вращения якоря динамо-машины с постоянным магнитом увеличилась на 10%. На сколько процентов увеличилась при этом полезная мощность динамо-машины?

4. Сопротивление обмотки якоря мотора равно R_1, а обмотки индуктора — R_2. Если обмотки якоря и индуктора соединены последовательно и подключены к одному источнику тока, говорят о моторах с последовательным возбуждением, или о сериесных двигателях. Если же обмотки соединены параллельно, говорят о моторах с параллельным возбуждением, или о шунтовых двигателях. В каком случае максимальная полезная мощность будет больше? Каковы при этом коэффициенты полезного действия шунтового и сериесного двигателей? Напряжение на клеммах мотора равно U.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Ниже помещены варианты вступительных экзаменов по математике 1973 года на гуманитарных факультетах Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Отделение планирования экономической кибернетики экономического факультета

Вариант 1

1. График функции $y = 1 - 3x^2$ пересекается в двух точках с прямой, наклоненной к оси x под углом φ. Вычислить абсциссу середины отрезка, соединяющего проекции точек пересечения на ось x.

2. Найти все пары чисел x, y, для которых выполняются одновременно следующие условия:

а) $x^2 - 2xy + 12 = 0$;
б) $x^2 + 4y^2 \leqslant 60$;
с) x является целым числом.

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с площадью основания S и высотой h. Через вершину A_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость, пересекающая боковое ребро BB_1 в точке B_2, боковое ребро CC_1 в точке C_2 и боковое ребро DD_1 в точке D_2. Найти объем той части параллелепипеда, которая расположена под секущей плоскостью, если известно, что $CC_2 = c$.

4. 5100 шаров, из которых 300 красных, а остальные — белые, разложены в некотором числе ящиков так, что в каждом ящике находится не более трех шаров красного цвета. Доказать, что найдется два ящика, содержащих одинаковое число шаров (белых и красных в совокупности).

Вариант 2

1. График функции $y = 2x^2 - x$ пересекается в двух точках с наклонной прямой, проходящей через точку оси y с ординатой b. Найти среднее геометрическое между длинами отрезков, соединяющих начало координат с проекциями точек пересечения на ось абсцисс.

2. Найти все пары чисел x, y, для которых одновременно выполняются следующие условия:

а) $2x^2 - xy + 9 = 0$;
б) $2x^2 + y^2 \leqslant 81$;
в) x является целым числом.

3. Точки E и F лежат по одну сторону от плоскости треугольника ABC, причем отрезок EA перпендикулярен этой плоскости, а основание H перпендикуляра FH, опущенного из точки F на эту плоскость, лежит на отрезке BC. Найти объем многогранника, ограниченного треугольниками ABC, AEC, EFC, FCB, BFE и AEB, если известно, что $EA = a$, $FH = b$ и площадь треугольника ABC равна S.

4. В 100 ящиках разложено 4000 белых и 300 красных шаров, причем вес каждого красного шара в три раза больше веса каждого белого шара. Доказать, что найдется два ящика, содержимое которых имеет одинаковый вес.

Отделение политической экономии экономического факультета

Вариант 1

1. Катер прошел вверх, против течения реки, 4 *км*, затем прошел вниз, по течению, еще 39 *км*, затратив на все 1 час времени. Найти скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки 7,5 *км/ч*.

2. В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся обеих боковых сторон треугольника и первой окружности. Определить радиус второй окружности.

3. Решить уравнение

$$1 - \sqrt{13 + 3x^2} = 2x.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x + \sin 2x - 4\sin 3x + 2\cos x - 4}{\sin x - 1} = 0.$$

5. Решить неравенство

$$\log_x \frac{1}{3} < \log_{\frac{x+1}{2}} \frac{1}{3}.$$

Вариант 2

1. Моторная лодка прошла вниз, по течению реки, 45 *км* и вверх, против течения, еще 4 *км*, затратив на все это 1 час времени. Скорость течения реки 8,5 *км/ч*. Найти скорость лодки в стоячей воде.

2. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписана окружность. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся основания, одной из боковых сторон треугольника и вписанной в него окружности. Определить радиус второй окружности.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{5 - 2x} = 6x - 1.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\cos 4x + \cos 2x + 4\cos 3x + 2\cos x + 4}{2\cos x - 1} = 0.$$

5. Решить неравенство

$$\log_{2x} 3 > \log_{3x+1} 3.$$

Факультет психологии

Вариант 1

1. Двое рабочих получили задание обработать партию из 72 одинаковых деталей. Первый рабочий обработал за 3 часа часть этой партии, после чего был сменен вторым рабочим, обработавшим за 4 часа оставшуюся часть партии. Сколько деталей обрабатывает за час второй рабочий, если для обработки 18 деталей ему требуется время, на $^1/_2$ часа больше, чем то, за которое обрабатывает 18 деталей первый рабочий?

2. Найти все корни уравнения

$$2\log_2 \sin x + \log_2 (4\,\mathrm{ctg}^2 x) = \log_2 3.$$

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) сторона основания равна a, боковое ребро пирамиды равно $5a/\sqrt{2}$. Пусть A и C — противоположные вершины основания пирамиды, E — середина ребра SC. Найти расстояние от центра шара, вписанного в пирамиду $SABCD$, до плоскости, проведенной через точки A и E параллельно диагонали BD основания $ABCD$.

4. Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$2^{\frac{3}{2}\log_2 (21-5x)} < 32 + 2^{\log_2 (8x-7)}.$$

Вариант 2

1. Два автоматических станка обрабатывают фанеру. Первый станок приступил к обработке партии в 64 $м^2$ фанеры и за 4 часа обработал часть этой партии, после чего оставшаяся часть партии была обработана за 2 часа вторым станком. Сколько фанеры обрабатывает за час второй станок, если 24 $м^2$ он обрабатывает за время, на один час большее, чем требуется на обработку 24 $м^2$ первому станку?

2. Найти все корни уравнения

$$\log_3 (2\,\mathrm{tg}^2 x) = \log_3 2 - 2\log_3 (2\cos x).$$

3. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) равны a, высота пирамиды равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}a$. Пусть B и D — противоположные вершины основания пирамиды, E — середина ребра SC. Найти расстояние от центра шара, описанного около пирамиды $SABCD$, до плоскости, проведенной через точки A, D, E.

4. Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$3^{\frac{5}{2}\log_3 (13-4x)} - 3^{\log_3 (3x-2)} < 47.$$

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

Вариант 1

1. Сумма, равная 53 коп., составлена из трехкопеечных и пятикопеечных монет, общее число которых меньше 15. Если в этом наборе монет трехкопеечные монеты заменить пятикопеечными, а пятикопеечные — трехкопеечными, то полученная в результате сумма уменьшится по сравнению с первоначальной, но не более чем в 1,5 раза. Сколько трехкопеечных монет было в наборе?

2. Плоскость, не содержащая вершин заданной правильной n-угольной пирамиды, делит совокупность этих вершин на две части. Сколькими способами можно осуществить подобное деление?

3. Найти минимальное значение следующего выражения:

$$\cos 2x - 8\cos x.$$

4. Можно ли вокруг четырехугольника $ABCD$ описать окружность, если $\angle ADC = 30°$, $AB = 3$, $BC = 4$ и $AC = 6$?

5. Решить уравнение

$$\log_{x-1} \sqrt[4]{2x^2 - 8x + 9} = \frac{1}{2}.$$

Вариант 2

1. В классе, в котором учится менее 27 человек, писали контрольную работу. Среди выставленных за нее оценок встречаются только оценки «3», «4» и «5». Оценки «3» и «5» получило одинаковое число учеников, а оценок выше «3» поставлено больше 23. Оценку «4» получило нечетное число учеников. Сколько оценок «3» и «4» было поставлено?

2. Грани трехгранной призмы, занумерованные числами от 1 до 5, окрашиваются пятью разными красками так, чтобы грани, имеющие общее ребро, были окрашены разными цветами. Сколько различных способов такой окраски существует, если два способа окраски считаются одинаковыми только тогда, когда при каждом из них грани с одинаковыми номерами окрашиваются в один и тот же цвет?

3. Найти минимальное значение следующего выражения:

$$\frac{1}{\cos^4 x} - \mathrm{tg}^2 x.$$

4. Вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Кроме того, $AB=3$, $BC=4$, $CD=5$ и $AD = 2$. Чему равна длина отрезка AC?

5. Решить уравнение

$$\log_x \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1.$$

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Новые книги

Академия наук всегда уделяла большое внимание пропаганде научных достижений. Этой цели, в частности, служит серия «Научно-популярная литература», издаваемая с 1931 года. За сорок с лишним лет выпущено около 1300 книг. Среди них — вошедшие в классику мировой литературы произведения С. И. Вавилова, В. А. Обручева, А. Е. Ферсмана, Е. В. Тарле и других ученых. Успешными были издания коллективных научно-популярных трудов, дающих обзор современного состояния и проблем науки в ее ведущих областях, например: *«Глазами ученого»* под редакцией А. Н. Несмеянова, *«Наука и молодежь»*, *«Химия больших молекул»* под редакцией А. В. Топчиева и др. В последнее время редакция научно-популярной литературы издательства «Наука» ежегодно выпускает 50—60 научно-популярных книг.

В 1974 году в редакции научно-популярной литературы издательства «Наука» выйдут следующие научно-популярные книги по математике и физике.

1. Виленкин Н. Я. *Популярная комбинаторика*. Объем 12 л. Тираж 25 000 экз. Цена 40 коп. (IV квартал).

С комбинаторными задачами приходится иметь дело математикам, физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по кодам и многим другим. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений. В книге в популярной форме рассказывается об интересных комбинаторных задачах и методах их решения.

2. Фаермарк Д. С. *Задача пришла с картины*. Объем 8,2 л. Тираж 90000 экз. Цена 54 коп. (I квартал).

Книга представляет собой своеобразную попытку создания научно-беллетристического произведения на математической основе. Рассказав о знаменитой картине Н. П. Богданова-Бельского «Устный счет», о жизни художника и о его школьном наставнике — известном педагоге и просветителе С. А. Рачинском, изображенном на картине среди крестьянских детей, автор обращается к задаче, условие которой написано на классной доске. Далее читатель узнает о многих интересных задачах, о русских, советских и зарубежных математиках, внесших большой вклад в теорию чисел. Книга содержит много интересных математических фактов, наблюдений, теорем, и несомненно будет полезна читателям «Кванта».

3. Гегузин Я. Е. *Очерки о диффузии в кристаллах*. Издание второе, дополненное. Объем 12 л. Тираж 30 000 экз. Цена 40 коп. (III квартал).

В книге около семидесяти глав-очерков, в каждой из которых популярно рассказано о каком-нибудь диффузионном явлении, процессе или механизме. Темы очерков выбраны так, что книга охватывает практически все те проявления диффузионного перемещения атомов, которые представляют научный интерес или важны для практики. Каждая из глав-очерков — это самостоятельный рассказ, который с другими связан только единством темы. Автор книги — доктор физико-математических наук, исследователь, непосредственно изучающий диффузию, поэтому о многом в книге говорится на основе личного опыта. В новом издании книга дополнена очерками об эффектах и явлениях, обнаруженных и изученных в последнее время. В частности, изложены представления о так называемой квантовой диффузии.

4. Губкин А. Н. *Электреты*. Объем 10 л. Тираж 20 000 экз. Цена 65 коп. (III квартал).

Электрет — это постоянно наэлектризованный диэлектрик, несущий на одной стороне положительный заряд, а на другой — отрицательный и способный создавать электрическое поле в окружающем его пространстве. В книге дается описание методов изготовления электретов из разных диэлектриков, их свойств, теорий электретного эффекта, принципов работы различных электретных приборов. Обсуждаются новые направления технического применения электретов.

5. Жданов Г. Б. *Множественная генерация частиц*. Объем 8 л. Тираж 12 000 экз. Цена 50 коп. (II квартал).

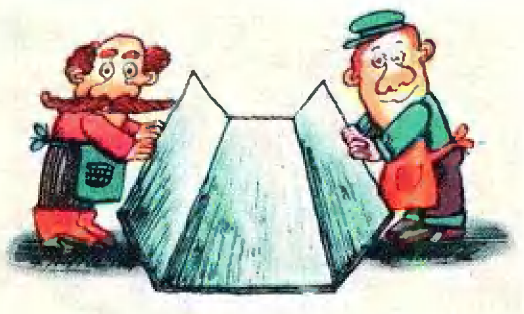
Новые астрофизические открытия познакомили нас с миром сверхвысоких температур и давлений. В этих условиях частицы атомных ядер — нуклоны — могут ускоряться до энергий, которые эквивалентны нагреву материи до триллионов градусов. При столкновениях таких частиц концентрируется невообразимо огромная энергия, что приводит к одновременному рождению (генерации) множества новых частиц — мезонов, возбужденных нуклонов и античастиц. О методах экспериментального изучения процессов множественной генерации частиц с помощью космических лучей и мощных ускорителей заряженных частиц и рассказывает эта книга.

В. П. Лишевский

Задачи

1. Из цилиндрического бревна надо вырезать прямоугольный брус наибольшего объема. Какой формы должно быть сечение этого бруса?

2. Из прямоугольного металлического листа надо согнуть желоб с сечением в форме равнобочной трапеции (см. рисунок). Какой ширины должны быть боковые полосы и под каким углом надо их отогнуть, чтобы сечение желоба имело наибольшую площадь?



Рисунки Э. Назарова

3. Почему керосиновая лампа гаснет, если подуть сверху в ее стеклянный колпак?

4. Вам нужно определить вес тела. Известно, что чашечные весы, которыми вы можете пользоваться, «неправильные». Зато гири — «правильные». *Как определить с их помощью вес тела?*

5. Почему вода в проруби не поднимается до верхней кромки льда?

6. Стороны прямоугольника выражаются целыми числами. Какой длины должны они быть, чтобы периметр прямоугольника численно равнялся его площади?

КОЗА НА ПРИВЯЗИ

В.Н.Крупский, А.И.Орлов

После окончания занятий в вечерней математической школе, когда последние школьники уже ушли домой, мы увидели забытую кем-то тетрадь. Это был дневник без имени автора. Записи показались нам интересными, и мы решили напечатать выдержку из дневника.

«... Козы прожорливы и съедают все, до чего могут дотянуться. Мой приятель ловко использовал это обстоятельство. Он жил в деревне и хорошо знал грибные места. Но когда приходили друзья и спрашивали, куда пойти завтра за грибами, он отвечал: «Коза покажет». В самом деле, к вечеру его коза съедала траву на участке в форме стрелки, направленной к самому грибному месту (рис. 1). Мне стало интересно, как это у него получается. Вчера я рассказал об умной козе моему соседу-математику, и вот что он мне ответил.

Математик. — Это совсем не так сложно, как ты думаешь. Давай разбираться с самого начала. Если в поле привязать козу к колышку десятиметровой веревкой, то она съест траву, конечно, в круге радиуса 10 метров. Попробуем привязать ее по-другому. В точках A и B вобьем колышки, между ними натянем веревку. У второй веревки один конец закрепим на «ошейнике» козы, а на другом конце сделаем петлю, которая будет скользить по первой веревке. Теперь коза сможет съесть траву на участке, состоящем из прямоугольника и двух полукругов с центрами в точках A и B (рис. 2). Расстояние от точки границы «выеденного» участка до первой веревки всегда равно длине второй веревки.

Я. — А что такое «расстояние от точки до веревки»? Ведь можно измерять расстояние от точки M до точки A, или до точки B, или до какой-нибудь внутренней точки C отрезка AB (рис. 3). Все время мы будем получать разные результаты.

Математик. — Расстоянием от точки M до отрезка называется

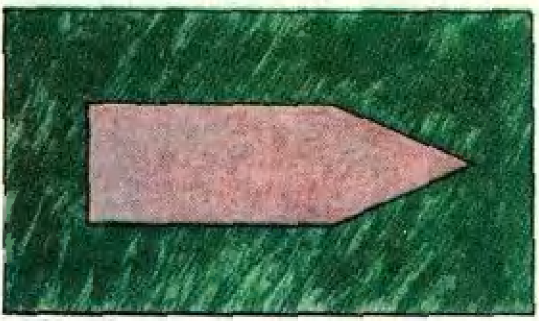


Рис. 1.

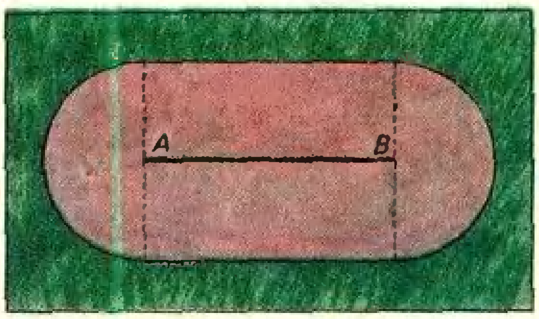


Рис. 2.

наименьшее из расстояний от точки M до точек отрезка. На рисунке 3 расстоянием от точки M до отрезка AB является длина отрезка MA, потому что MA — наименьший из отрезков, соединяющих точку M с точками отрезка AB. Если же основание C' перпендикуляра, опущенного на прямую AB из точки M', попадает в отрезок AB, то в качестве расстояния надо взять длину этого перпендикуляра $M'C'$.

Теперь попробуем «ограничить» козу прямоугольным участком. Постараемся использовать предыдущий результат. Вбив колышки в точках A и B и привязав козу, как мы делали раньше, ограничим ее уже знакомой фигурой, которую нарисуем черным карандашом (рис. 4). Если вбить колышки в точках C и D, то козе придется питаться внутри фигуры, обведенной красным. Как ты думаешь, что будет, если мы к ошейнику козы привяжем две веревки, по одной «от каждой фигуры»?

Я. — Здорово придумано! Теперь она будет есть траву только внутри общей части черной и красной фигур, то есть внутри прямоугольника.

Математик. — Да, так и получится. Математики называют общую часть двух фигур их пересечением. Всегда, когда мы сумеем при помощи веревок и колышков ограничить козу какими-то двумя фигурами, мы сможем ограничить ее и пересечением этих фигур. Просто надо к ошейнику козы привязать веревки и «от первой», и «от второй» фигур.

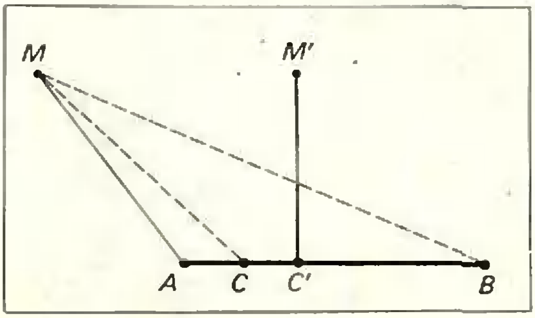


Рис. 3.

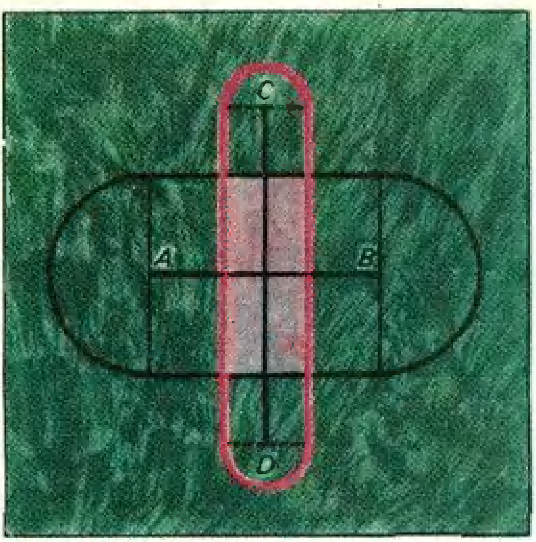


Рис. 4.

Я. — Но если козу привязать к колышку десятиметровой веревкой, то она, вытянув шею, доберется до травы, которая растет дальше, чем в десяти метрах. Шея-то у нее длинная!

Математик. — Ты прав. Мы упрощаем дело — строим математическую модель. Например, мы считаем, что земля ровная, коза съедает всю траву, до которой может дотянуться, причем коза маленькая, а веревки длинные, и изображаем козу точкой.

Я. — И считаем, что веревки не растягиваются и скользят друг по другу. И еще — очень важно! — что коза не запутывается в веревках и может перепрыгнуть через них.

Математик. — Совершенно верно. Теперь вернемся к твоему приятелю. Стрелка — это пересечение параллелограмма и прямоугольника (рис. 5), так что ничего удивительного в поведении козы нет, она может «построить» и более интересные фигуры.

Задача 1. Попробуй ограничить козу параллелограммом.

Задача 2. Ограничь козу
а) треугольником;
б) правильным шестиугольником;
в) заданным выпуклым многоугольником.

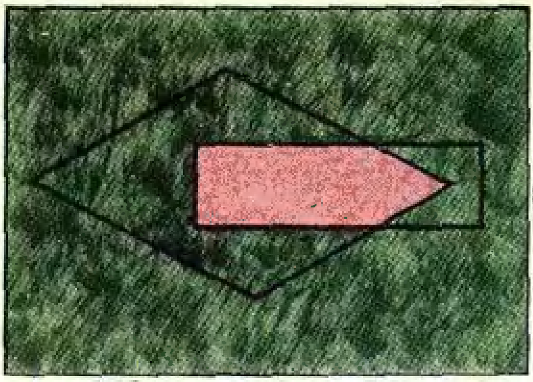


Рис. 5.

Я. — Решив эти задачи, я смогу заставить козу «съесть» и сектор.

Математик. — Конечно, ведь сектор — это пересечение треугольника с кругом, а обе эти фигуры ты сможешь получить. Кстати, вот тебе еще задача.

Задача 3. Как заставить козу съесть полукруг?

Я. — Я подумаю над твоими задачами. Интересно, ты сам полностью придумал «Теорию голодной козы» или воспользовался какими-нибудь математическими понятиями?

Математик. — Я уже говорил о таких вещах, как расстояние от точки до отрезка, пересечение фигур. Но, по-моему, самое нужное математическое понятие, которое использовалось, — это понятие «окрестности фигуры радиуса R».

Определение. *Окрестностью радиуса R фигуры Ф называется множество всех тех точек, расстояние от которых до фигуры Ф не превосходит R (здесь R — неотрицательное число).*

Я. — А что такое «расстояние от точки до фигуры»?

Математик. — Это естественное обобщение понятия «расстояние от точки до отрезка».

Определение. *Расстоянием от точки M до фигуры Ф называется наименьшее из расстояний от точки M до точек фигуры Ф.*

Я. — Значит, окрестность радиуса R точки — это круг радиуса R, окрестность радиуса R отрезка AB — та самая фигура, с которой ты начал разговор (рис. 2). А что такое окрестность радиуса 0?

Математик. — Сама фигура Ф. Вообще, если $R_1 < R_2$, то окрестность радиуса R_1 фигуры является частью окрестности радиуса R_2.

Я. — А прямоугольник является пересечением окрестностей отрезков (рис. 4). Интересно...

Математик. — Заметим, что окрестность радиуса R фигуры Ф состоит из тех и только тех точек плоскости, что лежат в окрестности радиуса R хотя бы одной из точек Ф, то есть лежат в одном из кругов радиуса R с центрами в точках Ф. Кстати, вот тебе еще задачи.

Задача 4. Что является окрестностями радиуса 1 следующих фигур (см. рис. 6):

а) креста;

б) окружности;

в) прямоугольника;

г) границы этого прямоугольника?

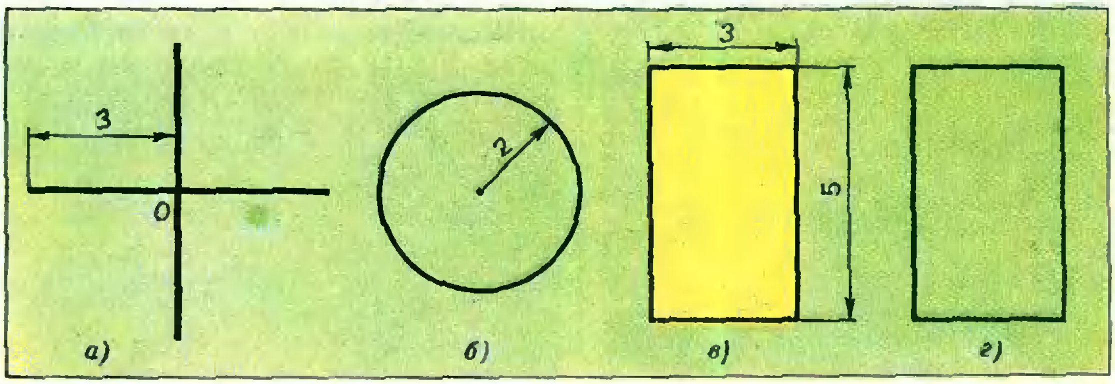


Рис. 6.

Задача 5. Какова площадь окрестности радиуса R *выпуклого* многоугольника с периметром P и площадью S?

Я. — Мы забыли про козу.

Математик. — Нет, почему же? Если у нас есть проволока, можно петлю веревки длины R надевать на нее. Тогда коза съест окрестность радиуса R *проволочного* контура. Мы считаем, конечно, что контур приварен к единственному колышку, так что он неподвижен, и петля свободно скользит по нему.

Я. — Значит, с помощью проволоки можно заставить козу съесть окрестности радиуса R окружности и границы прямоугольника?

Математик. — Да. Вот с окрестностью креста дело обстоит сложнее.

Задача 6. Подумай, какой нужен проволочный контур, чтобы получить окрестность креста.

Я. — Действительно, сам крест в качестве контура не подойдет — ведь через точку O (рис. 6, *а*) петля не пройдет. Надо подумать... Интересно, можно ли в «Теории голодной козы» использовать окрестность самого прямоугольника, *а не его границы*?

Математик. — Построим низкую загородку по границе прямоугольника так, что коза легко перепрыгивает через нее. Один конец веревки длины R привяжем к ошейнику, а другой — к рогульке — «якорю», который может двигаться только внутри прямоугольника. Перетащить его через загородку коза не может. Тогда коза будет питаться в окрестности радиуса R прямоугольника.

Ты, может быть, знаешь, что разностью Φ_1/Φ_2 двух фигур Φ_1 и Φ_2 называют фигуру, состоящую из всех тех точек Φ_1, которые не лежат в Φ_2. Например, разностью прямоугольника со сторонами 30 *м* и 40 *м* и окрестностью его границы радиуса 5 *м* будет прямоугольник со сторонами 20 *м* и 30 *м* (рис. 7).

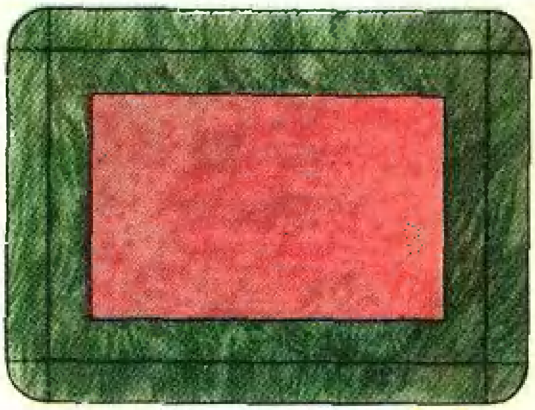


Рис. 7.

Я. — В «Теории голодной козы» это можно использовать так. К прямоугольному проволочному контуру 30 *м*×40 *м* пятиметровой цепью привяжем собаку. Она будет бегать по окрестности радиуса 5 *м* границы этого прямоугольника и не пускать козу за пределы прямоугольника 20 *м*×30 *м*.

Математик. — Вот похожая задача.

Задача 7. *Как одной собакой удержать непривязанную козу в полукруге?*

«Теорию голодной козы» можно развивать в разных направлениях. *Например, можно пользоваться только колышками и веревками и требовать, чтобы все веревки были постоянно натянуты. Тогда заставить козу ограничиться прямоугольником $ABCD$ можно так: вбить колышки в вершинах прямоугольника, натянуть веревки между A и B и между C и D, набросить веревочное кольцо на веревки AB и CD, натянуть его до отказа и привязать козу к кольцу. Ведь для точек прямоугольника сумма расстояний до двух противоположных сторон постоянна. Теперь ты сможешь заставить козу «съесть» треугольник и при новых ограничениях...».*

Следующий лист был выдран, и мы не узнали о дальнейшем развитии «Теории голодной козы». Может быть, читатели «Кванта» помогут нам и предложат свои варианты теории?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Задачи о пересечении тел»

1. а) $\frac{V}{2}$; б) $\frac{2}{9}V$; в) $\frac{12}{25}V$.

2. При $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ объем общей части равен $V\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}$. Указание. Рассмотрите прямоугольник, получающийся при пересечении тетраэдра плоскостью, перпендикулярной оси вращения и такой, что угол между его диагоналями α (таких прямоугольников будет два).

3. Отношение объема части тетраэдра, находящейся внутри куба, к объему всего тетраэдра равно $\frac{54-28\sqrt{2}}{27}$.

4. $2(2-\sqrt{3})$.

5. $\frac{23}{32}a^3$.

6. $\frac{3}{11}$ (считая от вершины пирамиды).

7. $\frac{1}{6}$. Указание. Пусть одна грань двугранного угла пересекает какое-то ребро куба в точке M, а другая грань — другое ребро в точке N, тогда эти ребра непременно выходят из одной вершины, обозначим ее A, причем $MA+NA=1$.

8. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

9. $\frac{9a^2h^3}{12h^2+a^2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{12h^2+a^2}}{a\sqrt{3}}$.

10. $\frac{abc}{ab+bc+ac}$.

К статье «Электрические машины постоянного тока»

1. 8400 *об/мин.*

2. 6 *квт.*

3. 21%.

4. $P_{o.\,max}=\frac{U^2}{4(R_1+R_2)}$; $\eta_0=\frac{1}{2}$;

$P_{ш.\,max}=\frac{U^2}{4R_1}$; $\eta_ш=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2\frac{R_1}{R_2}}$.

К статье «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова Отделение планирования и экономической кибернетики...

Вариант I

1. $-\frac{1}{6}\operatorname{tg}\varphi$. Указание. Уравнение прямой имеет вид $y=x\operatorname{tg}\varphi+b$, $\varphi\neq\pi/2$. Абсциссы точек пересечения прямой и параболы являются корнями уравнения $1-3x^2=x\operatorname{tg}\varphi+b$, а искомая абсцисса середины отрезка, соединяющего проекции точек пересечения на ось x, равна полусумме корней этого квадратного уравнения.

2. $x_1=3$, $y_1=7/2$; $x_2=-3$, $y_2=-7/2$.

3. $(c+h)S/2$. Указание. Продолжив боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 за верхнее основание $A_1B_1C_1D_1$, пристроить к данному параллелепипеду сверху параллелепипед $A_1B_1C_1D_1A'B'C'D'$ высоты c. Доказать, что секущая плоскость $A_1B_2C_2D_2$ делит объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ пополам.

4. Доказательство проведем от противного. Допустим, что все шары удалось разложить в N ящиков так, что в каждом ящике находится не более трех красных шаров и никакие два ящика не содержат одинакового числа шаров. Занумеруем ящики в порядке возрастания числа лежащих в них шаров и обозначим через n_i число шаров (белых и красных в совокупности) в i-м ящике.

Непосредственно из сказанного следует справедливость соотношений

$$n_1\geqslant 1,\ n_2\geqslant n_1+1,\ n_3\geqslant n_2+1,\ \ldots,\ n_N\geqslant n_{N-1}+1,$$

откуда заключаем, что имеют место оценки

$$n_1\geqslant 1,\ n_2\geqslant 2,\ \ldots,\ n_N\geqslant N.$$

Складывая все эти неравенства и вспоминая, что $n_1+\ldots+n_N=5100$, получаем

$$5100\geqslant\frac{N(N+1)}{2},$$

откуда $N\leqslant 100$. Но, с другой стороны, $N\geqslant 100$, поскольку лишь при этом условии можно разложить 300 красных шаров, не помещая больше трех красных шаров в каждый ящик.

Итак, $N=100$ и, следовательно, в каждый ящик положено по три красных шара. Тогда

$$n_1\geqslant 3,\ n_2\geqslant 4,\ n_3\geqslant 5,\ \ldots,\ n_{100}\geqslant 102,$$

и, складывая эти неравенства, придем к противоречию:
$$5100 = n_1 + \ldots + n_{100} \geqslant$$
$$\geqslant 3 + \ldots + 102 = \frac{105 \cdot 100}{2} = 5250.$$

Вариант 2

1. $\sqrt{|b|/2}$.

2. $x_1 = 2,\ y_1 = 17/2;\ \ x_2 = -2,\ \ y_2 = -17/2$.

3. $\frac{a+b}{3} S$.

Вариант 3

1. $(a+1)/2$.

2. $x_1 = 2,\ y_1 = 9;\ x_2 = -2,\ y_2 = -9$.

3. $\frac{a+b+c}{3} S$.

Отделение политической экономии...

Вариант 1

1. 37,5 *км/ч*.

2. $\frac{a}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$.

3. $x = -2$.

4. $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi,\ \ x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi,$ $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

5. $0 < x < 1$.

Вариант 2

1. 42,5 *км/ч*.

2. $\frac{a\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

3. $x = 1/2$.

4. $x = \pi + 2n\pi,\ \ n = 0,\ \ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

5. $x > 1/2$.

Факультет психологии

Вариант 1

1. 9 деталей.

2. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n=0,$ $\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

3. $\frac{5a\sqrt{11}}{44}$.

4. $x_1 = 3;\ x_2 = 4$.

Вариант 2

1. 8 $м^2$.

2. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ n = 0,\ \pm 1,\ \ldots$

3. $\frac{7a\sqrt{3}}{72}$.

4. $x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

Отделение структурной и прикладной лингвистики

Вариант 1

1. Шесть.
2. $n(n-1)+2$ способа.
3. Минимальное значение равно -7.
4. Нельзя.
5. $x = 4$.

Вариант 2

1. 1 оценка «3» и 23 оценки «4».
2. 240 способов.
3. Минимальное значение равно 1.
4. $\sqrt{299/11}$.
5. $x = 2$.

К статье «Телевидение готовит в вуз» (*см. «Квант», 1974, № 4*)

Математика

Задачи

1. $x = -2$.
2. 24, 42.
3. За 3 часа.
4. 13 *см*. Указание. Если $x,\ y,\ z$ — ребра прямоугольного параллелепипеда, то его диагональ равна
$$\sqrt{(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)}.$$
5. $\frac{S_1 S_2}{2a}$.
6. $\frac{3\sqrt{6}}{2} a^2$. Указание. Доказать, что в основание пирамиды можно вписать круг, причем высота пирамиды проходит через центр этого круга.
7. $\frac{2ah}{\sqrt{9a^2+4h^2}}$.
8. $\arccos\sqrt{-\cos\alpha}$.

Контрольная работа № 4

1. $x_1 = \pi n,\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ n,\ k = 0,$ $\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$
2. $x = 8,\ y = 6$.
3. $-4 \leqslant x < 0,\ \frac{\sqrt{17}-1}{2} < x \leqslant 2$.
4. $x = \frac{9}{2}\pi + 6\pi k,\ k=0,\ \pm 1\ \pm 2, \ldots$
5. $0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{3}},\ \ x \geqslant 3$.

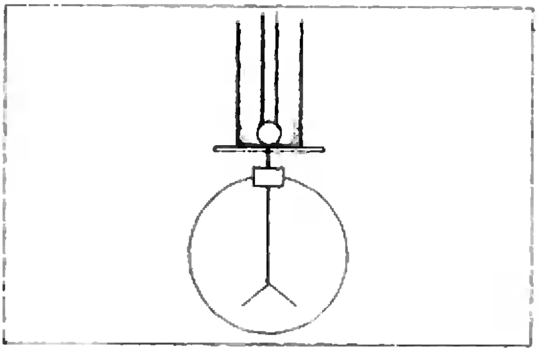
Указание. Обозначить $\log_x 3$ через y.

Контрольная работа № 5

1. 2 *км/ч*.
2. 3535.
3. $\dfrac{4\sqrt{2}R^2}{\sin\alpha}$.
4. $\dfrac{a\sin 2\alpha \sin(\beta/2)}{2+2(\sin\alpha+\cos\alpha)\sin\beta/2}$. Указание. При решении задачи полезно воспользоваться формулой $r=\dfrac{3V}{S'}$, где V — объем пирамиды, S' — площадь полной поверхности пирамиды, r — радиус шара, вписанного в пирамиду.
5. $\dfrac{8}{3}\pi R^3$.

Физика

1. $\Delta l=\dfrac{g}{4\pi^2}(T_2^2-T_1^2)=0{,}05$ *м*.
2. $T\approx 0{,}49$ *с*.
3. $l_1=\dfrac{\Delta l}{1-n^2}=1{,}1$ *м*; $l_2=l_1-\Delta l=0{,}89$ *м*.
4. $F_{\text{в}}=0{,}96$ *н*.
5. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\alpha}{g-\dfrac{qE}{m}}}=3{,}3$ *с*.
6. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+\dfrac{q^2E^2}{m^2}}}}=1{,}05$ *с*.
7. $\lambda=2\pi\dfrac{l}{\varphi_2-\varphi_1}=1{,}2$ *м*.
8. $P_{\text{т}}=\dfrac{U^2R}{R^2+\left(2\pi\nu L-\dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}\approx 36$ *вт*.
9. $\rho=\dfrac{1}{2\pi\nu\varepsilon_0\varepsilon}=750$ *ом·м*.



10. $\dfrac{I_1}{I_2}=\dfrac{\sqrt{R^2+\dfrac{1}{(2\pi\nu C)^2}}}{\sqrt{R^2+(2\pi\nu L)^2}}=2{,}8$.
11. $L=\dfrac{1}{4\pi^2\Delta C}\left(\dfrac{1}{\nu_1^2}-\dfrac{1}{\nu_2^2}\right)=15{,}5\times 10^{-3}$ *гн*.
12. $d=4\pi^2\nu^2L\varepsilon\varepsilon_0S=3{,}6\cdot 10^{-3}$ *м*.
13. $L=\dfrac{1}{8\pi^2C\Delta\nu^2}=7{,}8\cdot 10^{-5}$ *гн*.
14. $C_1=\dfrac{C_2(2\pi c\sqrt{LC_2}-\Delta\lambda)^2}{4\pi^2c^2LC_2-(2\pi c\sqrt{LC_2}-\Delta\lambda)^2}=150$ *пф*

(где $c=3\cdot 10^8$ *м/с* — скорость света).

К задачам «Квант» для младших школьников»
(см. «Квант», 1974, №4)

1. Шоссе надо провести под углом 60° к реке.
2. Шарик большего диаметра подскочит выше.
3. 7744.
4. См. рисунок.
5. Искомое геометрическое место точек — окружность радиуса $100\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ *м*, ее центр находится на прямой, соединяющей группы, на расстоянии 100 *м* от группы из двух громкоговорителей и 150 *м* — от группы из трех громкоговорителей.

Корректор *Н. Б. Румянцева*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 15/II-74 г.
Подписано в печать 8/IV-74 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 5.
Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 7,20
Тир. 386 215 экз. Т-20863
Цена 30 коп. Заказ 360

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Уголок коллекционера

На марках — Академия наук СССР

В нашей стране неоднократно выпускались марки, посвященные Академии наук СССР, ее институтам и учреждениям. Первые две такие марки были выпущены в 1925 году в связи с празднованием 200-летия Академии.

На этих марках был изображен портрет первого русского академика, выдающегося ученого нашей родины, М. В. Ломоносова на фоне главного здания Академии наук в Ленинграде. Одну из этих марок мы воспроизводим в верхней части нашей подборки.

В 1945 году, в связи с торжествами по поводу 220-летия Академии, была выпущена серия из двух марок. На одной из них изображено здание Президиума Академии наук в Москве, на Ленинском проспекте. Это же здание мы видим в правой части недавно выпущенной марки, посвященной 250-летию Академии наук.

В 1940 году в серии из трех марок, посвященных М. В. Ломоносову, была выпущена марка с изображением старейшего здания, принадлежащего Академии наук в Ленинграде,— знаменитой петровской кунсткамеры, в которой долгое время находились физический кабинет и астрономическая обсерватория.

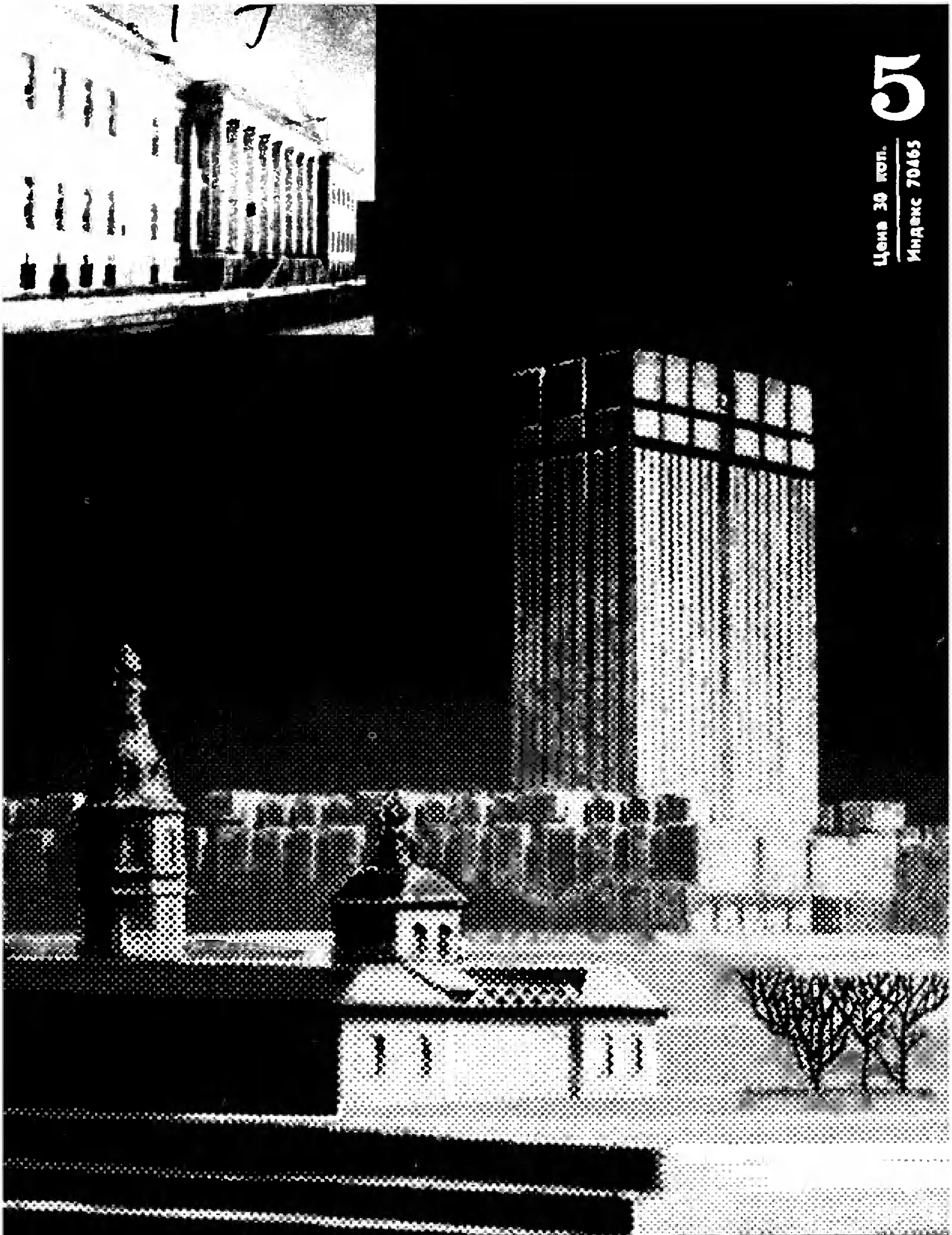
Здание кунсткамеры воспроизведено также на юбилейной марке 1974 года (левая часть) и еще на трех приведенных здесь марках. Две из них посвящены М. В. Ломоносову. Третья марка была выпущена в 1957 году в связи с 250-летием со дня рождения одного из основателей Академии наук выдающегося математика и механика Леонарда Эйлера.

В 1839 году Академия обогатилась Пулковской обсерваторией, которая и сейчас является Главной астрономической обсерваторией нашей страны. Она была основана русским астрономом В. Я. Струве. Главный корпус этой обсерватории мы видим на двух представленных здесь марках. Первая из них вышла в 1954 году к открытию обсерватории, восстановленной из руин после Великой Отечественной войны, во время которой на ее территории проходил передний край героической обороны Ленинграда. На этой же марке воспроизведены портреты трех крупнейших русских астрономов — академиков В. Я. Струве (в центре), Ф. А. Бредихина (слева) и А. А. Белопольского (справа). Вторая марка была выпущена двумя годами позже, в 1956 году. Она посвящена 125-летию со дня рождения академика Ф. А. Бредихина, выдающегося исследователя комет.

А. В. Алтыкис
В. А. Лешковцев

5

Цена 30 коп.
Индекс 70465



На фотографии приведен проект нового здания Президиума Академии наук СССР (авторы проекта Ю. Платонов, А. Звездин, А. Батырева, С. Захаров, А. Левенштейн).
Вверху — здание Президиума Академии наук СССР, находящееся в Ленинграде.